



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

CLAUDIA LUQUE JUSTO

**O $g(t)$ -movimento Browniano e a ação de seu fluxo em
tensores**

**CAMPINAS
2015**

Claudia Luque Justo

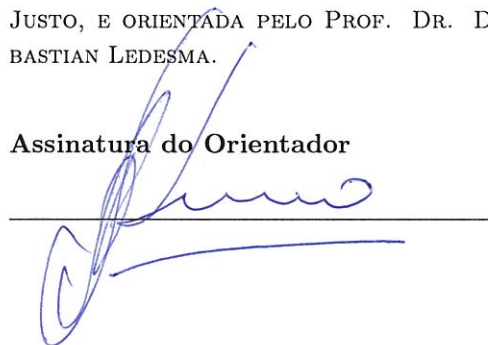
O $g(t)$ -movimento Browniano e a ação de seu fluxo em tensores

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em matemática.

Orientador: Diego Sebastian Ledesma

O ARQUIVO DIGITAL CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELA ALUNA CLAUDIA LUQUE JUSTO, E ORIENTADA PELO PROF. DR. DIEGO SEBASTIAN LEDESMA.

Assinatura do Orientador



CAMPINAS
2015

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): Não se aplica.

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

L974g Luque Justo, Claudia, 1984-
O $g(t)$ -movimento browniano e a ação de seu fluxo em tensores / Claudia Luque Justo. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Diego Sebastian Ledesma.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Movimentos brownianos. 2. Variedades riemanianas. 3. Fluxo estocástico. 4. Equações diferenciais estocásticas. I. Ledesma, Diego Sebastian, 1979-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: The $g(t)$ -brownian motion and the action of its flow to tensors

Palavras-chave em inglês:

Brownian movements

Riemannian manifolds

Stochastic flow

Stochastic differential equations

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutora em Matemática

Banca examinadora:

Diego Sebastian Ledesma [Orientador]

Pedro José Catuogno

Paulo Regis Caron Ruffino

Ryuichi Fukuoka

Fabiano Borges da Silva

Data de defesa: 18-08-2015

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 18 de agosto de 2015 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). DIEGO SEBASTIÁN LEDESMA



Prof(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO



Prof(a). Dr(a). PAULO REGIS CARON RUFFINO



Prof(a). Dr(a). RYUICHI FUKUOKA



Prof(a). Dr(a). FABIANO BORGES DA SILVA

A minha amada filha: Jasmin Gisele

*A minha querida família: Claudio, Pastora, Marco, Carlos, Maria, Daniel, Jean Pier, Oliver
e Luana*

Agradecimentos

Primeiro de tudo, gostaria de agradecer muito a Deus por me guiar, iluminar e me dar tranquilidade para seguir em frente com os meus objetivos e não desanimar com as dificuldades.

A meu orientador e amigo Prof. Dr. Diego Sebastian Ledesma pela confiança em mim depositada, por sua dedicação, paciência e por ter me conduzido desde o mestrado até o doutorado com a calma necessária para me ajudar.

A minha querida família Claudio, Pastora, Marco, Carlos, Maria, Daniel, Jean Pier, Oliver e Luana que souberam entender a minha ausência nos muitos momentos importantes. A minha filha Jasmin e tia Luisa pela ajuda e por agüentarem meus momentos de ansiedade e estresse nos meses em que me dediquei ao doutorado.

Aos meus amigos e colegas de lanches David, Enrique, Julio, Marina, Carlos, Dan, Mario, Jaime e Deimer pela convivência, companheirismo e pela ajuda intelectual durante a realização deste trabalho. Também agradecer a meus amigos de sempre Silvia, Elmer e Taisinha pela grata companhia e inolvidáveis passeios nestes últimos anos. Não quero esquecer de Daphne, Milton, Giane, Natalia e Gracieli importantes amigos durante minha estadia em Campinas.

A todos meus professores da Graduação e Pós Graduação por suas imensas contribuições em minha formação.

Aos funcionários da Secretaria de Pós Graduação do IMECC-UNICAMP pela gentileza e atenção prestados diariamente.

À CAPES pelo apoio financeiro sem o qual não haveria condições de executá-lo.

Resumo

Neste trabalho estudamos ao $g(t)$ -movimento Browniano e as aplicações geométricas e topológicas de seu fluxo estocástico associado sobre uma variedade Riemanniana M , munida de métricas $\{g(t) : t \in I\}$ que variam com respeito ao tempo. Começamos com a construção, feita via mergulho isométrico, do $g(t)$ -movimento Browniano sobre a variedade Riemanniana $(M, g(t))$ e obtemos condições geométricas para a não explosão do mesmo. Baseados nesta construção, consideramos o fluxo solução $\{\xi_t : t \geq 0\}$ do $g(t)$ -movimento Browniano e obtemos aplicações geométricas e topológicas destes fluxos que serão classificadas em dois:

- Primeiro, sobre 1-formas $\theta(t)$ que dependem do tempo. Calculamos a fórmula de Itô para o fluxo ξ_t atuando sobre $\theta(t)$ e caracterizamos esta fórmula em relação a fórmula de Weitzenböck.
- Segundo, sobre campos de tensores $K(t)$ que dependem do tempo. Calculamos a fórmula de Itô para o fluxo ξ_t atuando sobre $K(t)$ e restringindo nossa atenção para o caso do tensor métrico (Isto é, $K(t) = g(t)$ tensor do tipo $(0, 2)$), mostramos várias propriedades geométricas úteis para mostrar a nulidade dos grupos de Homotopia sobre $(M, g(t))$ sempre que o $g(t)$ -movimento Browniano seja fortemente momento estável.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Estocásticas, Movimento Browniano, Variedades Riemannianas, Fluxos Estocásticos.

Abstract

We study the $g(t)$ -Brownian motion and geometric and topological applications of its stochastic flow associated on a Riemannian manifold M , provided of metrics $\{g(t) : t \in I\}$ that vary with respect to time. We begin with the construction, made via isometric embedding, of $g(t)$ -Brownian motion on a Riemannian manifold $(M, g(t))$ and obtain geometric conditions for non-explosion of the same. Based in this construction, we consider the solution flow $\{\xi_t : t \geq 0\}$ of the $g(t)$ -Brownian motion and we obtain geometric and topological applications that will we classify on two levels:

- First, on 1-forms $\theta(t)$ depending smoothly on time. We calculated Ito's fórmula for the solution flow ξ_t of the $g(t)$ -Brownian motion acting on $\theta(t)$ and we characterize this fórmula in relation to the Weitzenböck fórmula.
- Second, on tensor fields $K(t)$ depending smoothly on time. We calculate Ito's fórmula for a general stochastic flow acting on $K(t)$ and restricting our attention to the case of the metric tensor (this is, $K(t) = g(t)$ tensor of type (0.2)), we show several useful geometric properties to show the nullity of Homotopy groups on $(M, g(t))$ where the $g(t)$ -Brownian motion is strongly moment stable.

Keywords: Stochastic Differential Equations, Brownian motion, Riemannian manifold, Stochastic flows.

Sumário

Dedicatória	5
Agradecimentos	6
1 Introdução	11
2 Preliminares	15
2.1 Cálculo estocástico sobre variedades diferenciáveis	15
2.1.1 Equações diferenciáveis estocásticas sobre variedades	18
2.1.2 Processos de difusão	21
2.2 Movimento Browniano sobre variedades	23
2.2.1 Métrica Riemanniana e operador de Laplace Beltrami	24
2.2.2 Construção do movimento Browniano via mergulho isométrico	25
2.3 Fluxos estocásticos sobre variedades	27
2.4 Fluxos estocásticos atuando sobre campos de tensores	28
3 A não explosão do $g(t)$-movimento Browniano via mergulho isométrico	33
3.1 O $g(t)$ -movimento Browniano via mergulho isométrico	33
3.2 Exemplos do $g(t)$ -movimento Browniano	39
3.2.1 O $g(t)$ -movimento Browniano sobre o Toro	39
3.2.2 O $g(t)$ -movimento Browniano sobre a esfera	43
3.2.3 O $g(t)$ -movimento Browniano sobre o cilindro	45
3.3 Completitude estocástica do $g(t)$ -movimento Browniano	48
4 Análise geométrico diferencial para o fluxo solução do $g(t)$-movimento Browniano	55
4.1 Fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano: Propriedades	56
4.2 Fluxo do $g(t)$ -movimento Browniano atuando sobre campos de vetores dependendo do tempo	57
4.3 Fluxo do $g(t)$ -movimento Browniano atuando sobre 1-formas dependendo do tempo	61
4.4 Fórmula de Weitzenböck	65
5 Ação ξ_t^* em campos tensores dependendo do tempo e aplicações	69
5.1 Fórmula de Itô para fluxos atuando sobre campos de tensores dependendo do tempo	69
5.2 Ação de ξ_t^* sobre o tensor métrico $g(t)$	73
5.2.1 Tensor métrico $g(t)$	74

5.3	Estabilidade de fluxos estocásticos e aplicações	80
-----	--	----

Capítulo 1

Introdução

Nesta tese trabalhamos sobre uma variedade diferenciável M de dimensão d , munida de uma família de métricas Riemannianas $\{g(t) : t \in I\}$ que dependem diferenciavelmente do tempo. Em particular, estamos interessados em construir o $g(t)$ -movimento Browniano como uma solução de uma equação diferencial estocástica sobre $(M, g(t))$ e obter aplicações geométricas de seu fluxo solução associado.

Teremos como primeiro objetivo melhorar a construção via mergulho isométrico do $g(t)$ -movimento Browniano, feita em C. Luque [18] e mostrar a não explosão deste processo via mergulho isométrico e sob algumas condições geométricas. Por outro lado, consideramos campos de tensores dependentes do tempo $K(t)$ do tipo (p, q) sobre uma variedade Riemanniana arbitrária. A segunda parte de nossa tese será calcular a fórmula de Itô para fluxos estocásticos atuando sobre estes campos de tensores $K(t)$. Por último, consideramos o fluxo solução $\{\xi_t : t > 0\}$ associado ao $g(t)$ -movimento Browniano e a fórmula de Itô para ξ_t atuando sobre os campos de tensores $K(t)$. Adaptaremos nossas construções às ideias dadas por K.D Elworthy [7] e K.D Elworthy and S. Rosenberg [10] para assim obter aplicações geométricas e topológicas interessantes sobre $(M, g(t))$. Estas aplicações são descritas com mais detalhes a seguir.

- Para 1-formas $\theta(t)$ que dependem do tempo. Calculamos a fórmula de Itô para o fluxo ξ_t atuando sobre $\theta(t)$ e caracterizamos esta fórmula em relação a fórmula de Weitzenböck.
- Para campos de tensores $K(t)$ que dependem do tempo. Calculamos a fórmula de Itô para o fluxo ξ_t atuando sobre $K(t)$ e restringindo nossa atenção para o caso do tensor métrico (Isto é, $K(t) = g(t)$ tensor do tipo $(0, 2)$), adaptamos no nosso contexto várias propriedades geométricas dadas por K.D Elworthy and S. Rosenberg [10] úteis para mostrar a nulidade dos grupos de Homotopia sobre $(M, g(t))$ sempre que o $g(t)$ -movimento Browniano seja fortemente momento estável.

Organização do trabalho

Este trabalho é formado por quatro capítulos que serão descritos a seguir.

Capítulo 1.

Este capítulo será dividido em quatro seções. Na primeira seção, damos uma breve introdução à teoria do cálculo estocástico sobre variedades diferenciáveis, destacando a noção do movimento Browniano. Enunciamos a fórmula de Itô para a integral de Stratonovich e damos a noção de equações diferenciáveis estocásticas sobre variedades, que são uma generalização

natural das equações diferenciáveis estocásticas no espaço euclidiano. Por último, estudamos os processos de difusão sobre variedades. Uma das principais ferramentas que destacamos nesta seção, é a conhecida fórmula de Itô generalizada (reescrita utilizando a integral de Stratonovich) dada no Teorema 2.7, que trata-se da regra de diferenciação para a composição de dois processos estocásticos. Na segunda seção, apresentamos a construção do movimento Browniano sobre uma variedade Riemanniana (M, g) munida de uma métrica fixa g . A construção será feita via um mergulho isométrico de M no espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Dizemos que, X_t é um movimento Browniano sobre (M, g) se ele é uma difusão gerada pelo operador $(1/2) \sum_{\alpha=1}^l P_\alpha^2 = (1/2) \Delta_M$, onde P_α denota a α -ésima projeção ortogonal do espaço euclidiano \mathbb{R}^n no subespaço $T_x M \subseteq \mathbb{R}^n$. Isto dá uma relação entre certos operadores elípticos de segundo ordem e processos de Itô. Uma vez tratadas as equações diferenciais estocásticas sobre variedades, nas duas últimas seções estudamos condições necessárias e suficientes para obter que sua solução defina um fluxo de difeomorfismos sobre a variedade. Estes resultados estão mais próximos aos resultados dados para o caso de espaços Euclidianos. As principais referências para o conteúdo deste capítulo, são os livros de N. Ikeda e S. Watanabe [13], E.P. Hsu [12], M. Émery [8], K.D. Elworthy [5] e H. Kunita [15].

Capítulo 2

Este capítulo será dividido em três seções. Na primeira seção, daremos alguns argumentos adicionais e faremos uma ligeira modificação para a construção via mergulho isométrico do $g(t)$ -movimento Browniano sobre a variedade $(M, g(t))$, feita em C. Luque [18]. Primeiro consideramos a variedade produto $N = M \times I$ onde o intervalo I pode ser da forma $[0, T]$, $[0, \infty)$ ou \mathbb{R} . Munimos a variedade N com a métrica h dada por:

$$h(x, t): \begin{array}{ccc} T_{(x,t)}(M \times I) \times T_{(x,t)}(M \times I) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ ((X, a\partial_t), (Y, b\partial_t)) & \mapsto & g(t)(x)(X, Y) + abf(t)^2 \end{array}$$

onde $X, Y \in T(M)$ e $\partial_t \in T(I)$ e $f(t)$ limitada e decrescente em t com $\int_I f^2 dt < \infty$. Logo, mergulhamos isometricamente a variedade N num espaço euclidiano \mathbb{R}^m e a partir deste mergulho construímos campos $X_k(t)$ sobre a variedade $(M, g(t))$ e consideramos a equação diferencial estocástica de Stratonovich:

$$\begin{cases} dx_t = \sum_{k=1}^m X_k(t)(x_t) \diamond dB_t^k, \\ x_0 = x \in M, \end{cases}$$

onde \diamond denota a integral de Stratonovich. No Teorema 3.6 mostraremos que a solução desta equação constitui o $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$, pois será uma difusão gerada pelo operador

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m X_k(t)^2 = \frac{1}{2} \Delta_{g(t)}.$$

Em seguida, na segunda seção damos alguns exemplos deste processo sobre algumas variedades Riemannianas (como por exemplo: o toro, a esfera e o cilindro) com as métricas variando no tempo.

Finalmente na última seção, estudamos o tempo explosão do $g(t)$ -movimento Browniano. Especificamente, estamos interessados em achar condições geométricas que garantam que nosso $g(t)$ -movimento Browniano não explode. Para isto, consideramos o processo $y_t = (x_t, t)$ sobre

a variedade produto $N = M \times I$, onde x_t é o $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$. Observamos que y_t satisfaz a equação diferencial estocástica:

$$\begin{cases} dy_t = \partial_t(y_t) + \sum_{k=1}^m \widetilde{X}_k(y_t) \diamond dB_t^k, \\ y_0 = (x, 0) \in N, \end{cases}$$

onde \widetilde{X}_k são campos sobre a variedade N . A completitude estocástica do $g(t)$ -movimento Browniano x_t , é obtida aproveitando a independência do tempo no espaço N . Portanto, no Teorema 3.11 obtemos condições geométricas sobre N e a métrica $g(t)$ de modo que y_t não explode. Boas referências para o desenvolvimento desde capítulo são os trabalhos de M. Arnaudon, K.A. Coulibaly, and A. Thalmaier [1]. A.K. Coulibaly [3], C. Luque [18] e E.P. Hsu [12].

Capítulo 3

Este capítulo será dividido em quatro seções. Na primeira seção, consideramos o fluxo solução $\{\xi_t : t \geq 0\}$ do $g(t)$ -movimento Browniano e daremos algumas propriedades geométricas do fluxo solução ξ_t que serão de utilidade nas seções posteriores. Na segunda seção, sobre a variedade Riemanniana M consideramos a derivada de ξ_t (que consiste das aplicações lineares $(\xi_t)_* = T_x \xi_t : T_x(M) \rightarrow T_{\xi_t(x)}(M)$) e campos dependentes do tempo $U(t)$ dados por:

$$U(t) - U(0) = \int_0^t Y(s) \diamond dN_s,$$

onde $\{N_t : t \geq 0\}$ é um semimartingale contínuo e $Y(s)$ é um campo de vetores sobre a variedade. Logo, motivados pelo trabalho de Kunita [15], no Teorema 4.3 obtemos a fórmula de Itô para o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano atuando sobre os campos $U(t)$. Na terceira seção, consideramos sobre a variedade 1-formas $\theta(t)$ que dependem do tempo dadas por:

$$\theta_t - \theta_0 = \int_0^t \alpha_s \diamond dN_s,$$

onde $\{N_t : t \geq 0\}$ é um semimartingale contínuo e $\alpha(s)$ é uma 1-forma sobre a variedade. Logo, no Teorema 4.8 obtemos a fórmula de Itô para o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano atuando sobre $\theta(t)$ e com o fim de completar nosso objetivo, no Teorema 4.11 caracterizamos geometricamente esta fórmula em termos da $g(t)$ -família de conexões $\{\nabla^{g(t)}\}$. Por último, na quarta seção guiados pelos livros de J. Jost [14] e E.P. Hsu [12] damos um breve repasso da fórmula de Weitzenböck

$$\square_g^1 \theta = \Delta_g^1 \theta - \text{Ric}(\cdot, \theta^\sharp),$$

para o g -Laplaciano sobre uma 1-forma θ . Logo, adaptando esta fórmula e as ideias dadas por Elworthy [7] no nosso contexto, no Teorema 4.14 caracterizamos a fórmula obtida no Teorema 4.8 em relação a fórmula de Weitzenböck. Boas referências para este capítulo são os trabalhos de H. Kunita [15], E.P. Hsu [12], J. Jost [14], K.D. Elworthy [6,7,8] e R. Abraham, J.E. Marsden and T. Ratiu [2].

Capítulo 4

Este capítulo será dividido em três seções. Na primeira seção, consideramos campos de tensores $K(t)$ do tipo (p, q) que dependem diferenciavelmente do tempo e tomam valores numa variedade diferenciável arbitrária M , eles são dados por:

$$K(t) - K(0) = \sum_{i=1}^r \int_0^t R(s)^i \diamond dN_s^i,$$

onde N_s^1, \dots, N_s^r são semimartingales contínuos e R_s^i são campos e tensores em M satisfazendo as condições do Teorema 2.7 dado nos Preliminares. Logo, no Teorema 5.1 calculamos fórmula de Itô para o fluxo solução de um sistema dinâmico estocástico qualquer, atuando sobre os campos de tensores $K(t)$. Na segunda seção, consideramos sobre M uma família de métricas Riemannianas $\{g(t) : t \in I\}$ que dependem diferenciavelmente do tempo e considerando o fluxo solução ξ_t do $g(t)$ -movimento Browniano. No Lema 5.3 calculamos a fórmula de Itô para o fluxo ξ_t atuando sobre campos de tensores do tipo (p, q) sobre $(M, g(t))$ dados por:

$$K(t) - K(0) = \int_0^t R(s) \diamond ds,$$

Logo, restringindo nossa atenção para o caso do tensor métrico (isto é, $K(t) = g(t)$ tensor do tipo $(0, 2)$) e adaptamos nossas construções às idéias do trabalho de K.D. Elworthy and S. Rosenberg [10] para mostrar os Teoremas 5.6, 5.8, 5.9 e o Corolário 5.10 que são propriedades geométricas úteis para aplicações topológicas posteriores. Na última seção, damos a noção de estabilidade de fluxos estocásticos e no Teorema 5.12 mostramos a nulidade dos grupos de Homotopia sobre $(M, g(t))$ sob certas condições geométricas e sempre que o $g(t)$ -movimento browniano seja fortemente momento estável. Boas referências para este capítulo são os trabalhos de H. Kunita [15], K.D. Elworthy [6,7,8], K.D. Elworthy and S. Rosenberg [10], K.D. Elworthy, and M. Yor [11], K.D. Elworthy, Y. Le Jan, and Xue-Mei Li [9], X.-M. Li [17] e R. Abraham, J.E. Marsden and T. Ratiu [2].

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo, daremos algumas definições e resultados relevantes para um melhor entendimento do restante do trabalho. Boas referências para este capítulo, relacionadas ao cálculo estocástico e principalmente para as demonstrações omitidas ao longo do mesmo são N. Ikeda e S. Watanabe [13], E.P. Hsu [12], M. Émery [8], K.D. Elworthy [5] e H. Kunita [15].

2.1 Cálculo estocástico sobre variedades diferenciáveis

Começamos esta seção introduzindo algumas noções básicas da teoria do cálculo estocástico no espaço euclidiano. Para mais informação, ver N. Ikeda e S. Watanabe [13], M. Émery [8], K.D. Elworthy [5] e H. Kunita [15].

Seja $(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade filtrado que satisfaz a seguintes condições usuais:

- $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ é uma filtração, ou seja, uma família crescente de sub- σ -álgebras da σ -álgebra \mathfrak{F} ;
- Para todo $t \geq 0$, \mathfrak{F}_t é completo com relação à medida de probabilidade \mathbb{P} , isto é, todo subconjunto de um conjunto de medida zero está contido em \mathfrak{F}_t ;
- $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ é contínuo à direita, isto é, para todo $t \geq 0$,

$$\mathfrak{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathfrak{F}_s.$$

Denotaremos por \mathbb{E} a esperança associada à probabilidade \mathbb{P} .

Um **processo estocástico** a valores em \mathbb{R}^n (o um espaço topológico) é uma família de variáveis aleatórias $\{X_t\}_{t \geq 0}$ a valores em \mathbb{R}^n , definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Dizemos que o processo estocástico é contínuo, se para quase todo $\omega \in \Omega$ o caminho $X(\cdot, \omega) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínuo.

Definição 2.1. Um processo estocástico $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ é um martingale relativa ao espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, se satisfaz as seguintes condições:

- (1) O processo X é adaptado,
- (2) $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$, para todo $t \geq 0$,

(3) $\mathbb{E}(X_s|\mathfrak{F}_t) = X_t$ para todo $s \geq t$.

Uma variável aleatória T é chamada de um **tempo de parada** com relação a uma filtração $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ se o evento $\{\omega : T(\omega) \geq t\}$ pertence à σ -álgebra \mathfrak{F}_t . Um exemplo de tempo de parada T usual, é tomar $T(\omega) = \inf\{t \geq 0, X_t(\omega) \in A\}$ onde $\{X_t\}_{t \geq 0}$ é um processo de trajetórias contínuas adaptada à filtração e $A \subset \mathbb{R}$ é conjunto aberto ou fechado. Dizemos que um processo X é um *martingale local* se existe uma sequência de tempos de parada $\tau_n \uparrow \infty$ tal que, para todo n , X^{τ_n} é um martingale. Denotamos por $(\Omega, \mathfrak{F}_*, \mathbb{P})$ o espaço de probabilidade filtrado que satisfaz as condições usuais.

Definição 2.2. Um processo $Y = \{Y_t\}_{t \geq 0}$ a valores em \mathbb{R}^n , é um \mathfrak{F}_* -semimartingale (isto é, adaptado à filtração \mathfrak{F}_*) se admite uma decomposição do tipo $Y = X + A$. Onde, X é um \mathfrak{F}_* -martingale local contínuo a valores em \mathbb{R}^n e A é um processo \mathfrak{F}_* -adaptado de variação finita tal que $A_0 = 0$.

Em seguida, passaremos a definir a integral estocástica de um processo f_t (contínuo e \mathfrak{F}_* -adaptado) pelo diferencial dM_t onde M_t é um martingale local contínuo com $[M]_t$ sua variação quadrática.

Seja $\Delta = \{0 = t_0 < \dots < t_n = T\}$ uma partição do intervalo $[0, T]$. Para qualquer $t \in [0, T]$ escolhemos t_k de Δ tal que $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ e definimos:

$$L_t^\Delta = \sum_{i=0}^{k-1} f_{t_i}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + f_{t_k}(M_t - M_{t_k}).$$

Seja L_t o limite da equação acima quando $|\Delta| \rightarrow 0$.

Definição 2.3. O limite L_t definido acima é chamado de **integral de Itô** de f_t por dM_t e é denotado por $\int_0^t f_s dM_s$.

Definimos uma outra integral estocástica, denotada pela diferencial $\diamond dX_t$ por:

$$\int_0^t f_s \diamond dX_s = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2} (f_{t_{i+1}} + f_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) + \frac{1}{2} (f_t + f_{t_k})(X_t - X_{t_k}) \right\}.$$

Definição 2.4. Se o limite dado acima existe, este é chamado de **integral de Stratonovich** de f_s por dX_s .

A fórmula de transformação entre as integrais de Itô-Stratonovich é dada por:

Teorema 2.5. Se f é um semimartingale contínuo, então a integral de Stratonovich esta bem definida e satisfaz:

$$\int_0^t f_s \diamond dX_s = \int_0^t f_s dX_s + \frac{1}{2} [f, X]_t,$$

onde $[f, X]_t$ é a variação quadrática.

Para a prova deste Teorema, ver H. Kunita [15].

A seguir, damos uma generalização da fórmula de Itô, que trata-se da regra de diferenciação para a composição de dois processos estocásticos.

Teorema 2.6. Seja $Y_t(x)$, $t \in [0, T]$ e $x \in \mathbb{R}^d$ um campo aleatório contínuo em (t, x) q.s. (quase sempre), satisfazendo as seguintes hipóteses

1. O campo $Y_t(x)$ é continuamente diferenciável por partes em x .
2. Para cada $x \in \mathbb{R}^d$, o campo $Y_t(x)$ é um semimartingale contínuo e satisfaz
 - (i) $dY_t(x) = \sum_{i=1}^m F_t^i(x) dZ_t^i$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$ q.s., onde Z_t^1, \dots, Z_t^m são semimartingales contínuos, $F_t^i(x)$ (com $t \in [0, T]$ e $x \in \mathbb{R}^d$) são campos aleatórios contínuos em (t, x) e satisfazem
 - (a) $F_t^i(x)$ são continuamente diferenciável por partes em x .
 - (b) Para cada $x \in \mathbb{R}^d$, os campos $F_t^i(x)$ são processos adaptados.
 - (ii) Seja $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$ um semimartingale contínuo.
Então, temos que

$$\begin{aligned}
 dY_t(X_t) &= \sum_{i=1}^m F_t^i(X_t) dZ_t^i + \sum_{j=1}^d \frac{\partial Y_t}{\partial x_j}(X_t) dX_t^j \\
 &\quad + \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_t^i}{\partial x_j}(X_t) d[Z^i, X^j]_t \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^d \frac{\partial^2 Y_t}{\partial x_j \partial x_i}(X_t) d[X^j, X^i]_t.
 \end{aligned}$$

Observamos que a fórmula acima não é como a fórmula clássica para a diferenciação de funções compostas, onde os dois últimos termos da equação anterior não aparecem. Para posteriores aplicações, algumas vezes será útil reescrever a fórmula acima utilizando a integral de Stratonovich. A nova fórmula obtida está mais perto da fórmula clássica para a diferenciação da função composta. No entanto, precisamos assumir algumas condições adicionais para esses processos.

Teorema 2.7. *Seja $F_t(x)$ com $t \in [0, T]$ e $x \in \mathbb{R}^d$ um campo aleatório contínuo em (t, x) q.c. satisfazendo:*

- (i) Para cada t , $F_t(\cdot)$ é uma aplicação de classe C^3 de \mathbb{R}^d em \mathbb{R} .
- (ii) Para cada x , $F_t(x)$ é um semimartingale contínuo e satisfaz

$$dF_t(x) = \sum_{j=1}^m f_t^j(x) \diamond dY_t^j, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \text{ q.c.}$$

onde Y_t^1, \dots, Y_t^m são martingales contínuos, $f_t^j(x)$ são campos aleatórios satisfazendo as condições (a) e (b) do Teorema 2.6. Se $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$ é um semimartingale contínuo, então temos:

$$dF_t(X_t) = \sum_{j=1}^m f_t^j(X_t) \diamond dY_t^j + \sum_{i=1}^d \frac{\partial F_s}{\partial x_i}(X_t) \diamond dX_t^i.$$

Corolário 2.8. *Seja $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^3 e seja $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$ semimartingales contínuos. Então temos*

$$dF_t(X_t) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_t) \diamond dX_t^i.$$

Os semimartingales são uma ferramenta muito útil pois muitos processos que podem ser definidos explicitamente são semimartingales, por exemplo as difusões. O espaço de semimartingales é o melhor cenário para a realização do cálculo estocástico.

Definição 2.9. Um processo B a valores em \mathbb{R} , é um movimento Browniano se:

- (1) $B_t = 0$, para $t = 0$.
- (2) Para todo $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$, as variáveis aleatórias $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ são independentes e normalmente distribuídas com:

$$\mathbb{E}[B_{t_i} - B_{t_{i-1}}] = 0 \quad e \quad \mathbb{E}[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2] = t_i - t_{i-1}.$$

Generalizando isto para o caso n dimensional, dizemos que um processo $B = (B^1, \dots, B^n)$ é um movimento Browniano em \mathbb{R}^n , se cada B^i constitui um movimento Browniano em \mathbb{R} e as σ -álgebras geradas por cada B^i são independentes.

2.1.1 Equações diferenciáveis estocásticas sobre variedades

Sejam M uma variedade diferenciável, $(\Omega, \mathfrak{F}_*, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade filtrado e τ um \mathfrak{F}_* -tempo de parada.

Definição 2.10. Dizemos que um processo contínuo X que toma valores em M e definido sobre $[0, \tau)$ é um semimartingale a valores em M se para cada $f \in C^\infty(M)$, $f(X)$ é um semimartingale a valores em \mathbb{R} , sobre $[0, \tau)$.

Uma equação diferencial estocástica de Stratonovich sobre uma variedade diferenciável é definida por m campos de vetores V_1, \dots, V_m sobre M , um semimartingale Z a valores em \mathbb{R}^m e uma variável aleatória $X_0 \in \mathfrak{F}_0$ tomando valores em M e que serve como valor inicial da solução. Assim ela é dada por:

$$dX_t = \sum_{\alpha=1}^m V_\alpha(X_t) \diamond dZ_t^\alpha.$$

Denotamos a esta equação por $\text{EDE}(V_1, \dots, V_m; Z, X_0)$.

Definição 2.11. Um semimartingale X a valores em M , definida até um tempo de parada τ é uma solução da equação $\text{EDE}(V_1, \dots, V_m; Z, X_0)$ até τ , se para todo $f \in C^\infty(M)$ tem-se:

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{\alpha=1}^m \int_0^t V_\alpha f(X_s) \diamond dZ_s^\alpha, \quad 0 \leq t < \tau. \quad (2.1.1)$$

Mais para frente vemos que, se M é mergulhada no espaço euclidiano \mathbb{R}^n e a equação dada em (2.1.1) se satisfaz para as funções coordenadas f_1, \dots, f_m , então teremos que (2.1.1) se cumpre para qualquer função diferenciável.

A vantagem da formulação via Stratonovich é que as equações diferenciáveis estocásticas de Stratonovich definidas sobre a variedade M se transformam consistentemente por difeomorfismos entre variedades. Denotemos por $\Gamma(TM)$ o espaço de campos de vetores diferenciáveis em uma variedade M (O espaço de seções do fibrado tangente TM). Um difeomorfismo $\phi : M \rightarrow N$

entre duas variedades induz uma aplicação $\phi_* : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TN)$ entre campos de vetores nas variedades respectivas pela regra

$$(\phi_* V)f(y) = V(f \circ \phi)(x), \quad y = \phi(x) \quad f \in C^\infty(N).$$

Ou equivalentemente, se V é um vetor tangente a uma curva C sobre a variedade M , $\phi_* V$ é o vetor tangente à curva $\phi \circ C$ sobre a variedade N .

Proposição 2.12. *Suponhamos que $\phi : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo entre as variedades M e N , e X um semimartingale a valores em M que é solução de $\text{EDE}(V_1, \dots, V_m; Z, X_0)$. Então $\phi(X)$ é uma solução de $\text{EDE}(\phi_* V_1, \dots, \phi_* V_m; Z, \phi(X_0))$ sobre a variedade N .*

Demonstração. Com efeito, como X é uma solução da $\text{EDE}(V_1, \dots, V_m; Z, X_0)$, então para todo $f \in C^\infty(M)$ tem-se:

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{\alpha=1}^m \int_0^t V_\alpha f(X_s) \diamond dZ_s^\alpha.$$

Denotamos por $Y = \phi(X)$ e seja $\varphi \in C^\infty(N)$. Se $f = \varphi \circ \phi \in C^\infty(M)$ e utilizando o fato que $V_\alpha(\varphi \circ \phi)(X_s) = (\phi_* V_\alpha)\varphi(Y_s)$ obtemos que

$$\begin{aligned} \varphi(Y_t) &= \varphi(\phi(X_t)) \\ &= \varphi(\phi(X_0)) + \sum_{\alpha=1}^m \int_0^t V_\alpha(\varphi \circ \phi)(X_s) \diamond dZ_s^\alpha \\ &= \varphi(Y_0) + \sum_{\alpha=1}^m \int_0^t (\phi_* V_\alpha)\varphi(Y_s) \diamond dZ_s^\alpha. \end{aligned}$$

Por tanto, $Y = \phi(X)$ é uma solução de $\text{EDE}(\phi_* V_1, \dots, \phi_* V_m; Z, \phi(X_0))$ em N . \square

Para mostrar que a $\text{EDE}(V_1, \dots, V_m; Z, X_0)$ tem uma única solução até seu tempo de explosão, consideramos a M como uma subvariedade fechada de \mathbb{R}^n (para n suficientemente grande) e identificamos M com sua imagem $i(M)$. Logo, um ponto $x \in M$ terá n -funções coordenadas $f^i(x) = x^i$ os quais servem como conjunto natural de funções teste para a fórmula de Itô em M .

Proposição 2.13. *Seja M uma subvariedade fechada de \mathbb{R}^n , f^1, \dots, f^n as funções coordenadas e X um processo contínuo a valores em M . Então se verificam os seguintes itens:*

- (i) *O processo X é um semimartingale sobre M se, e somente se X é um semimartingale a valores em \mathbb{R}^n ou equivalentemente se, e somente se $f^i(X)$ é um semimartingale a valores em \mathbb{R} , para cada $i = 1, \dots, n$.*
- (ii) *O processo X é uma solução de $\text{EDE}(V_1, \dots, V_m; Z, X_0)$ até um tempo de parada σ se, e somente se para cada $i = 1, \dots, n$ tem-se que:*

$$f^i(X_t) = f^i(X_0) + \sum_{\alpha=1}^m \int_0^t V_\alpha f^i(X_s) \diamond dZ_s^\alpha, \quad 0 \leq t < \sigma. \quad (2.1.2)$$

Demonstração. (i) Suponha que o processo X é um semimartingale a valores em M , então por definição temos que para todo $f \in C^\infty(M)$, $f(X)$ é um semimartingale a valores em \mathbb{R} .

Mas cada f^i para $i = 1, \dots, n$ é uma função diferenciável sobre M , então $f^i(X) = X^i$ é um semimartingale a valores em \mathbb{R} . Por tanto, X é um semimartingale a valores em \mathbb{R}^n .

Para a recíproca, suponha que o processo X mora em M e é um semimartingale a valores em \mathbb{R}^n . Seja $f \in C^\infty(M)$, como M é uma subvariedade fechada de \mathbb{R}^n , então a função f pode ser estendida a uma função $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $f \equiv \tilde{f}$ em M . Assim $f(X) = \tilde{f}(X)$ é um semimartingale a valores em \mathbb{R} , mas isto quer dizer que X é um semimartingale a valores em M .

(ii) Suponha que X é uma solução da EDE($V_1, \dots, V_m; Z, X_0$) até um tempo de parada σ , então para cada $f \in C^\infty(M)$ se cumpre (2.1.1), em particular para cada $f^i \in C^\infty(M)$ temos,

$$f^i(X_t) = f^i(X_0) + \sum_{\alpha=1}^m \int_0^t V_\alpha f^i(X_s) \diamond dZ_s^\alpha, \quad 0 \leq t < \sigma.$$

Para a recíproca, suponha que cada $f^i \in C^\infty(M)$ com $i = 1, \dots, n$, satisfaz a equação (2.1.2). Seja $f \in C^\infty(M)$ e $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sua extensão a \mathbb{R}^n , então $f(X_t) = \tilde{f}(f^1(X_t), \dots, f^n(X_t))$ e aplicando a fórmula de Itô a este processo resulta que,

$$\begin{aligned} d\{f(X_t)\} &= f_{x_i}(f^1(X_t), \dots, f^n(X_t)) \diamond d\{f^i(X_t)\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^m f_{x_i}(f^1(X_t), \dots, f^n(X_t)) \diamond V_\alpha f^i(X_t) \diamond dZ_t^\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \{f_{x_i}(X_t^1, \dots, X_t^n) V_\alpha f^i(X_t)\} \diamond dZ_t^\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^m V_\alpha f(X_t) \diamond dZ_t^\alpha. \end{aligned}$$

Na última passagem acima utilizamos a regra da cadeia para diferenciação de funções compostas. Assim, da integral da última equação obtemos que o processo X que toma valores em M , é solução da EDE($V_1, \dots, V_m; Z, X_0$) até um tempo de parada σ . \square

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ e consideremos os subconjuntos U_n de M dados por:

$$U_n = \{x \in M, d_M(x, 0) < n\},$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$ com $n > n_0$. Denotemos por τ_n o primeiro tempo de saída de X_t de U_n sujeito à condição inicial $X_0 = x \in U_n$.

Variando os $n \in \mathbb{N}$ com $n > n_0$, podemos construir uma sequência de processos $\{X_n(t)\}$ cada um dos quais está bem definido até o tempo τ_n . Assim,

$$\tau_n = \inf \{t > 0, d_M(X_n(t), 0) > n\}.$$

Claramente a sequência de tempos de parada $\{\tau_n : n \in \mathbb{N}, n > n_0\}$ é monótona crescente. Logo, admite um limite τ_e quando $n \rightarrow \infty$. Este tempo de parada τ_e é chamado de **tempo de explosão** do processo X_t .

Voltando às EDE($V_1, \dots, V_m; Z, X_0$), fixamos um mergulho de M sobre \mathbb{R}^n e consideramos M como uma subvariedade fechada de \mathbb{R}^n . Cada campo de vetores V_α pode ser visto como uma função diferenciável em M com valores em \mathbb{R}^n e pode ser estendido a um campo vetorial \tilde{V}_α sobre \mathbb{R}^n . Assim, temos que a equação dada por:

$$X_t = X_0 + \sum_{\alpha=1}^m \int_0^t \tilde{V}_\alpha(X_s) \diamond dZ_s^\alpha. \quad (2.1.3)$$

está no espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Portanto, tem uma única solução X , até seu tempo de explosão $e(X)$.

Proposição 2.14. *Seja X a solução da equação estendida dada em (2.1.3) até seu tempo de explosão $e(X)$ e $X_0 \in M$. Então $X_t \in M$ para $0 \leq t < e(X)$.*

Para a prova desta Proposição, ver o livro de E.P. Hsu [12].

Teorema 2.15. *Se $\{V_1, \dots, V_m\}$ são campos de vetores sobre M , Z uma semimartingale a valores em \mathbb{R}^l , e X_0 uma variável aleatória \mathfrak{F}_0 -mensurável que toma valores em M . Então, existe uma única solução da EDE($V_1, \dots, V_m; Z, X_0$) até um tempo de explosão $e(X)$.*

Demonstração. Seja X a solução da equação estendida EDE($\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_k; Z, X_0$), então pela Proposição 2.14, esta solução está em M até seu tempo de vida e satisfaz (2.1.3). Mas (2.1.3) é uma reescrita de (2.1.2), então pela parte (ii) da Proposição 2.13 temos que X é solução da EDE($V_1, \dots, V_k; Z, X_0$). Seja Y uma outra solução até um tempo τ . Logo, considerando a Y como uma semimartingale que toma valores em \mathbb{R}^n temos que ela é solução da equação estendida EDE($\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_k; Z, X_0$) até τ . Portanto, Y coincide com X sobre $[0, \tau)$. \square

2.1.2 Processos de difusão

Apresentamos um breve estudo das difusões, onde relacionamos a certos operadores elípticos de segundo ordem com certas classes de semimartingales via equações diferenciáveis estocásticas do tipo Itô. Sendo mais específicos, estudamos os semimartingales geradas por operadores diferenciáveis, elípticos de segundo ordem. Notemos que, o significado analítico de um processo de difusão pode-se obter de sua relação com os operadores elípticos de segundo ordem.

Seja L um operador diferenciável, elíptico de segundo ordem sobre uma variedade diferenciável M . Logo, para ω no espaço de caminhos de M (isto é, $\omega \in W(M)$) e para $f \in C^2(M)$, temos o processo

$$M^f(\omega)_t = f(\omega_t) - f(\omega_0) - \int_0^t Lf(\omega_s) ds,$$

onde $t \in [0, e(\omega))$.

Definição 2.16. (i) *Um processo estocástico \mathfrak{F}_* -adaptado $X: \Omega \rightarrow W(M)$, definido sobre um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathfrak{F}_*, \mathbb{P})$ é dito um processo de difusão gerado pelo operador L (ou simplesmente uma L -difusão), se X é um \mathfrak{F}_* -semimartingale a valores em M , até seu tempo de explosão $e(X)$ e*

$$M^f(X)_t = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s) ds, \quad 0 \leq t < e(X),$$

é um \mathfrak{F}_ -martingale local para todo $f \in C^\infty(M)$*

(ii) *Uma medida de probabilidade μ sobre o espaço padrão filtrado $(W(M), \mathfrak{B}(W(M)))_*$ é dita a medida de difusão gerada pelo operador L (ou simplesmente uma L -medida de difusão) se*

$$M^f(w)_t = f(w_t) - f(w_0) - \int_0^t Lf(w_s) ds, \quad 0 \leq t < e(w),$$

é um $\mathfrak{B}(W(M))_$ -martingale local para cada $f \in C^\infty(M)$, em relação à medida μ .*

Notemos que para um operador diferenciável, elíptico de segundo ordem L , define uma L -difusão e uma L -medida de difusão. Se X é uma L -difusão, então sua lei de probabilidade $\mu^X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ é uma L -medida de difusão; reciprocamente, se denotamos por μ a L -medida de difusão no espaço $W(M)$ que é gerada pelo operador L , então seus correspondentes processos coordenados $X(\omega)_t = \omega_t$ sobre $(W(M), \mathfrak{B}(W(M))_*, \mu)$ são L -difusões.

Em coordenadas locais sobre uma variedade M , o operador L tem a seguinte forma:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^d b^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

onde $a = \{a^{ij}\}: U \rightarrow \mathcal{L}_+(d)$ e $b = \{b^i\}: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ são funções diferenciáveis. Denotamos por $\mathcal{L}_+(l)$ o espaço de matrizes simétricas, definidas positivas de ordem $l \times l$ e $d = \dim(M)$. Restringindo nossa atenção para o caso $M = \mathbb{R}^n$ cuja base canônica é dada por $\{e_1, \dots, e_n\}$ e supondo que X é solução da equação diferencial estocástica;

$$dX_t^i = \sigma_i^j(X_t) dB_t^j + b^i(X_t) dt$$

onde $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^n)$ é um movimento Browniano n -dimensional. Aplicando a fórmula de Itô para $f \in C^2(M)$ temos que:

$$\int_0^t \partial_{x^i} f(X_s) \sigma_i^j(X_s) dB_s^j = f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \left((\sigma \sigma^T)^{ij} \partial_{x^i} \partial_{x^j} + b_i \partial_{x^i} \right) f(X_s) ds$$

Observamos que nesta equação integral de Itô, o lado direito é um martingale pois $B_t^i = B_t e_i$ é um movimento Browniano. Então X é uma L -difusão para o operador

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \cdot \sigma^T)^{ij} \partial_{x^i} \partial_{x^j} + \sum_{i=1}^n b^i \partial_{x^i}.$$

Queremos mostrar que: dado um operador diferenciável elíptico de segundo ordem e uma distribuição de probabilidade μ_0 em M , existe uma única L -medida de difusão cuja distribuição inicial é dada por μ_0 . Para mostrar isto, utilizamos a mesma estratégia que usamos para tratar as equações diferenciáveis estocásticas sobre uma variedade, isto é consideramos a M como uma subvariedade fechada de \mathbb{R}^n e estendemos o operador L a um operador \tilde{L} sobre \mathbb{R}^n , de modo que $L \equiv \tilde{L}$ em M . Assim, para o operador \tilde{L} temos que a \tilde{L} -difusão X é construída via solução de uma equação diferencial estocástica sobre \mathbb{R}^n , e verificamos que ela de fato mora em M e assim será uma L -difusão.

Primeiro, assumamos que M é uma subvariedade fechada de \mathbb{R}^n (via mergulho isométrico $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$), e estendemos o operador L em M ao espaço euclidiano \mathbb{R}^n da seguinte maneira: Sejam $\{z^1, \dots, z^n\}$ as funções coordenadas sobre \mathbb{R}^n , então definamos o operador;

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n \tilde{a}^{\alpha\beta} \partial_{z^\alpha} \partial_{z^\beta} + \sum_{\alpha=1}^n \tilde{b}^\alpha \partial_{z^\alpha}; \quad (2.1.4)$$

onde

$$\tilde{a}^{\alpha\beta} = a^{ij} (\partial_{x^i} z^\alpha) (\partial_{x^j} z^\beta) \quad \text{e} \quad \tilde{b}^\alpha = b^i (\partial_{x^i} z^\alpha),$$

são funções diferenciáveis sobre M e $\{\tilde{a}^{\alpha\beta}\}$ é definida positiva.

Assim, obtemos o operador \tilde{L} que é uma extensão do operador L no sentido do seguinte Lema.

Lema 2.17. *Suponha que $f \in C^\infty(M)$. Então para qualquer $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ extensão de f de M a \mathbb{R}^n , temos que $\tilde{L}\tilde{f} = Lf$ sobre M .*

Para a prova ver o livro de E.P. Hsu [12].

O seguinte passo é construir uma \tilde{L} -difusão sobre \mathbb{R}^n , via solução de uma equação diferencial estocástica da forma;

$$X_t = X_0 + \int_0^t \tilde{\sigma}(X_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \tilde{b}(X_s) ds, \quad (2.1.5)$$

onde B é um movimento Browniano euclidiano n -dimensional e X_0 é uma variável aleatória em \mathbb{R}^n independente de B . Se X é uma solução de equação (2.1.5), então pela fórmula de Itô temos que X é uma \tilde{L} -difusão com \tilde{L} dado por (2.1.4). Se definimos $\tilde{\sigma} = (\tilde{a})^{1/2}$ (no sentido de matrizes, pois \tilde{a} é uma matriz definida positiva devido à elipticidade do operador L). Mas isto quer dizer que $\tilde{\sigma} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ é a única função matricial, que é simétrica e definida positiva satisfazendo $(\tilde{\sigma})^2 = \tilde{a}$. A modo de aplicar a teoria estudada previamente, precisamos saber se $\tilde{\sigma}$ é localmente Lipschitz o que será tratado na seguinte Proposição.

Proposição 2.18. *Seja $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ uma função a valores matriciais, que é simétrica e definida positiva com $a \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(n, \mathbb{R}))$. Então sua raiz quadrada $\sigma = a^{1/2}$, é localmente Lipschitz.*

Para a prova ver o livro de E.P. Hsu [12].

Em virtude da Proposição 2.18 de acima, podemos dar uma solução X , da equação EDE($\tilde{\sigma}$, (B_t, t) , X_0) para algum X_0 onde X será uma L -difusão, como se enuncia no seguinte Teorema.

Teorema 2.19. *Seja L um operador elíptico diferenciável de segundo ordem sobre uma variedade diferenciável M e μ_0 uma medida de probabilidade sobre M . Se o processo X satisfaz a equação diferencial estocástica,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t (\tilde{a})^{1/2}(X_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \tilde{b}(X_s) ds,$$

então o processo X toma valores em M , e é uma L -difusão com distribuição inicial μ_0 .

Para a prova ver o livro de E.P. Hsu [12].

Teorema 2.20. *Uma L -medida de difusão com distribuição inicial dada é única.*

Para a prova deste Teorema ver o livro de E.P. Hsu [12].

2.2 Movimento Browniano sobre variedades

Uma vez tratados os semimartingales sobre variedades diferenciáveis, nesta seção estudamos o movimento Browniano o qual é um tipo especial de semimartingale. Nesta seção, daremos condições suficientes e necessárias para que uma semimartingale X a valores em uma variedade riemanniana (M, g) , seja um movimento Browniano.

O movimento Browniano sobre uma variedade Riemanniana M é um processo de difusão gerado por $\frac{1}{2}\Delta_g$ onde Δ_g é o operador de Laplace Beltrami sobre M , a generalização natural do operador de Laplace usual sobre o espaço Euclidiano.

2.2.1 Métrica Riemanniana e operador de Laplace Beltrami

Uma métrica riemanniana g sobre M , é um tensor do tipo $(0, 2)$ simétrico e estritamente positivo. Seja $\{x_1, \dots, x_d\}$ um sistema coordenado e $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, então a métrica Riemanniana pode ser escrita como

$$g_{ij} = g(X_i, X_j)$$

A matriz $g = (g_{ij})$ é definida positiva em cada ponto. Consideramos a M como uma variedade Riemanniana equipada com uma conexão de Levi-Cevita denotada por ∇ . Definimos sobre M o operador de Laplace Beltrami, como um operador elíptico de segundo ordem, que é uma generalização do operador de Laplace usual no espaço Euclidiano. Lembremos que sobre o espaço euclidiano tínhamos

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

Assim, para poder definir o operador de Laplace Beltrami Δ_g sobre M , precisamos primeiro definir o gradiente e a divergência sobre M . O gradiente $\operatorname{grad} f$ é o dual do diferencial df , assim ele é o campo sobre M definido pela relação:

$$g(\operatorname{grad} f, X) = df(X) = Xf, \quad \forall X \in \Gamma(TM),$$

Em coordenadas locais, o gradiente é dado por:

$$\nabla f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

A divergência div de um campo de vetores X é definido pela contração de um $(1, 1)$ -tensor ∇X . Logo, em coordenadas locais $\operatorname{div} X$ é dado por

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial(\sqrt{G} a^i)}{\partial x^i},$$

onde o campo $X = \sum_i a^i \partial / \partial x^i$ e $G = \det(g_{ij})$.

Assim combinando as expressões locais do gradiente e divergência, obtemos que o operador de Laplace Beltrami Δ_g sobre M , é dado por

$$\begin{aligned} \Delta_g &= \operatorname{div} \operatorname{grad} f \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}). \end{aligned}$$

Por tanto, Δ_g é um operador elíptico de segundo ordem não-degenerado. Ainda mais, da definição de $\operatorname{div} X$ temos

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^d g(\nabla_{X_i} X, X_i),$$

onde $\{X_i\}_{i=1}^d$ é uma base ortonormal de $T_x M$. Então, para $X = \operatorname{grad} f$ vemos que o operador div pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^d g(\nabla_{X_i} \operatorname{grad} f, X_i) \\ &= \sum_{i=1}^d \nabla_{X_i} g(\operatorname{grad} f, X_i) - g(\operatorname{grad} f, \nabla_{X_i} X_i) \\ &= \sum_{i=1}^d \nabla^2 f(X_i, X_i). \end{aligned}$$

Como $\Delta_g/2$ é um operador elíptico de segundo ordem sobre M , então o processo de difusão a valores em M gerado por $\Delta_g/2$ é chamado de um movimento Browniano sobre M . Precisamos gerar um movimento Browniano como uma solução de uma equação estocástica tipo Itô. Temos que a solução de uma equação diferencial estocástica sobre M da forma:

$$dX_t = \sum_{\alpha=1}^n V_\alpha(X_t) \diamond dB_t^\alpha + V_0(X_t)dt,$$

onde B é um movimento Browniano euclidiano, é uma L -difusão gerada por um operador elíptico de segundo ordem do tipo Hörmander:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i^2 + V_0.$$

Se conseguirmos escrever Δ_g nesta forma, então nosso movimento Browniano poderá ser gerado como uma solução de uma equação diferencial estocástica sobre uma variedade M . Infelizmente em geral, não existe uma maneira intrínseca de fazer isto sobre uma variedade Riemanniana. Vemos que se M é mergulhada isometricamente no espaço euclidiano \mathbb{R}^n então existe uma maneira de escrever Δ_g como uma soma de quadrados naturalmente associados com o mergulho. O teorema de mergulho de Nash garante que tais mergulhos sempre existem.

Teorema 2.21. *{Teorema de mergulho de Nash}*

Toda variedade Riemanniana pode ser mergulhada isometricamente em algum espaço euclidiano com a métrica padrão.

Suponhamos então que M está mergulhada isometricamente em \mathbb{R}^n (isto é, que a métrica em M induzida por \mathbb{R}^n coincide com a métrica inicial de M). Seja $\{\xi_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ a base canônica de \mathbb{R}^n . Para cada $x \in M$, consideramos $P_\alpha(x)$ a projeção ortogonal de ξ_α a $T_x M$. Assim P_α é um campo de vetores sobre M . No próximo teorema, damos uma caracterização do operador Laplaciano de Beltrami sobre M em função deste campo de vetores.

Teorema 2.22. *Nas condições acima, temos*

$$\Delta_g = \sum_{\alpha=1}^n P_\alpha^2.$$

Para a prova deste Teorema ver o livro de E.P. Hsu [12].

Por último, faremos referência a seguinte identidade, que será útil em demonstrações posteriores.

Corolário 2.23. *Com as mesmas notações acima resulta*

$$\Delta_g f = \sum_{\alpha=1}^n \nabla^2 f(P_\alpha, P_\alpha)$$

2.2.2 Construção do movimento Browniano via mergulho isométrico

Construímos o movimento Browniano sobre uma variedade Riemanniana (M, g) munida com uma métrica fixa g . O movimento Browniano será dado como um processo de difusão gerado por um operador de Laplace Beltrami $\Delta_g/2$.

Seja M uma subvariedade do espaço euclidiano \mathbb{R}^n , munida de uma métrica fixa g . O movimento Browniano sobre M pode ser obtido via solução de uma equação diferencial estocástica em M . Pelo Teorema 2.22 o operador de Laplace Beltrami Δ_g pode ser escrito como uma soma de quadrados

$$\Delta_g = \sum_{\alpha=1}^n P_\alpha^2$$

onde, para $\{\xi_\alpha\}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^n e cada $x \in M$, $P_\alpha(x)$ é a projeção ortogonal de ξ_α no $T_x M$. Cada P_α é um campo vetorial sobre M . Consideramos a seguinte equação diferencial estocástica sobre M , dado por um movimento Browniano euclidiano B_t de dimensão m .

$$\begin{cases} dx_t &= \sum_{\alpha=1}^m P_\alpha(x_t) \circ dB_t^\alpha, \\ x_0 &= x \in M \end{cases} \quad (2.2.1)$$

que é uma equação diferenciável estocástica sobre M , pois P_α são campos de vetores sobre M . Ainda mais, a solução x_t é um processo de difusão gerado por $(1/2) \sum_{\alpha=1}^m P_\alpha^2 = (1/2) \Delta_g$. Pela fórmula de Itô, para $f \in C^\infty(M)$ qualquer, obtemos que

$$f(x_t) = f(x_0) + M_t^f + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta_g f(x_s) ds, \quad 0 \leq t < \tau_e(x),$$

onde o processo:

$$M_t^f = \int_0^t P_\alpha f(x_s) \cdot dB_s^\alpha$$

é uma martingale local, logo a solução X_t da equação (2.2.1), constitui um movimento Browniano sobre M .

Exemplo 2.24. Assim, para $M = S^d$ a esfera d -dimensional mergulhada em \mathbb{R}^{d+1} , dada por:

$$S^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1}; \quad \|x\|^2 = 1\}$$

Seguiremos a construção de acima para o movimento Browniano B_t , sobre S^d . Sejam $\xi \in \mathbb{R}^{d+1}$ e $x \in S^d$ arbitrários temos que a projeção ortogonal de ξ no espaço tangente $T_x S^d$, está dada por

$$P(x)\xi = \xi - \langle \xi, x \rangle x.$$

Logo a matriz de $P(x)$ estará dada por

$$\begin{aligned} (P(x))_{ij} &= \langle P(x)\xi_i, \xi_j \rangle \\ &= \langle \xi_i - \langle \xi_i, x \rangle x, \xi_j \rangle \\ &= \langle \xi_i, \xi_j \rangle - \langle \xi_i, x \rangle \langle x, \xi_j \rangle \\ &= \delta_{ij} - x_i x_j, \end{aligned}$$

onde $\{\xi_i\}_{i=1}^{d+1}$ é base canônica de \mathbb{R}^{d+1} . Assim substituindo isto na equação (2.2.1) resulta que a solução B_t da equação

$$\begin{cases} dX_t^i = (\delta_{ij} - X_t^i X_t^j) \circ dW_t^j, \\ X_0^i \in S^d \end{cases}$$

equivalentemente

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t (\delta_{ij} - X_s^i X_s^j) \circ dW_s^j, \quad X_0 \in S^d$$

constitui um movimento Browniano sobre S^d .

2.3 Fluxos estocásticos sobre variedades

Seja M uma variedade conexa, compacta de classe C^∞ de dimensão d . Sejam $X_0(t), X_1(t), \dots, X_m(t)$; $m+1$ campos de vetores sobre M com parâmetro $t \in [0, T]$. Assumimos que X_1, \dots, X_m são campos de vetores de classe C^2 continuamente diferenciáveis em t , isto é, num sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_m) , estes campos são expressados como:

$$X_k(t) = \sum_{i=1}^d a_{k,i}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde $a_{k,i}(t, x)$ são funções de classe C^1 em t e funções de classe C^2 em x , com $i = 1, \dots, d$ e $k = 1, \dots, m$. No caso do campo X_0 , assumimos que $a_{0,i}(t, x)$ são funções contínuas em t e continuamente diferenciáveis em x . Consideramos a equação diferencial estocástica do tipo Stratonovich sobre a variedade M :

$$d\xi_t = \sum_{k=1}^m X_k(t, \xi_t) \diamond dB_t^k + X_0(t, \xi_t) dt. \quad (2.3.1)$$

Por conveniência escrevemos dt como dB_t^0 . Então podemos reescrever a fórmula de acima como:

$$d\xi_t = \sum_{k=0}^m X_k(t, \xi_t) \diamond dB_t^k.$$

Definição 2.25. Um campo aleatório $\xi_t(x)$, com $x \in M$, $s \leq t \leq \tau_e(x, \omega) \wedge T$ a valores em M é chamado de uma solução da equação (2.3.1) com condição inicial $\xi_0 = x$, se este satisfaz a seguintes condições:

- (i) $e(x, \omega)$ é (x, ω) -mensurável e pra qualquer x fixo, este é um \mathfrak{F}_t -tempo de parada, onde $\mathfrak{F}_t = \sigma(B_u - B_v; 0 \leq u \leq v \leq t)$
- (ii) $\xi_t(x)$ é contínuo em (t, x) .
- (iii) Para qualquer função F de classe C^3 , $F(\xi_t(x))$ é um \mathfrak{F}_t -semimartingale e para todo $t < e(x) \wedge T$ satisfaz:

$$F(\xi_t(x)) = F(x) + \sum_{k=0}^m \int_0^t X_k(r) F(\xi_r(x)) \diamond dB_r^k. \quad (2.3.2)$$

Como M é compacta, a solução é chamada maximal se $e(x) = \infty$ para todo x q.t.p. e para qualquer t . E para o caso de M não ser compacta, a solução é dita maximal se $\lim_{t \uparrow e(x)} \xi_t(x) = \infty$ se cumpre para $e(x) < \infty$. Aqui ∞ é o infinito da variedade M relacionada com a compactificação a um ponto.

Passaremos a expressar as equações (2.3.1) e (2.3.2) em coordenadas locais. Seja (x_1, \dots, x_d) uma coordenada local na vizinhança coordenada U . Observamos que se tomamos $F(x) = x_i$, então temos $X_k(t)F(x) = a_{k,i}(t, x)$. Por tanto se ξ_t satisfaz a equação (2.3.2), então ξ_t^i satisfaz:

$$\xi_t^i(x) = x_i + \sum_{k=0}^m \int_0^t a_{k,i}(r)(\xi_r(x)) \diamond dB_r^k, \quad (2.3.3)$$

para $t < T_U \wedge T$, onde $T_U = \inf\{t > 0 \mid \xi_t(x)U\}$.

Reciprocamente, resolvendo a equação (2.3.3) podemos construir uma solução da equação (2.3.2) em cada vizinhança coordenada. Consideramos a equação diferencial estocástica (2.3.3), onde $\xi_t(x) = (\xi_t^1(x), \dots, \xi_t^d(x))$. Temos uma única solução para o tempo $T_U(x)$ que é contínua em (t, x) . Portanto, a solução satisfaz a equação (2.3.2) para qualquer função F de classe C^3 .

Lema 2.26. *A solução $\xi_t^i(x)$ da equação (2.3.3) não depende da escolha das coordenadas locais.*

Teorema 2.27. *Existe uma única solução maximal $\xi_t(x)$, para a equação (2.3.2) sobre a variedade M .*

Para a prova deste Teorema ver Kunita [15].

Seja $\xi_t(x)$ com $x \in M$ a solução maximal da equação diferencial estocástica dada em (2.3.1). Para cada t , $\xi_t(\cdot, \omega)$ pode ser considerado como uma aplicação contínua de M em si mesmo. Denotamos por D_t e R_t o domínio e imagem de ξ_t respectivamente.

Teorema 2.28. (i) *Ambos D_t e R_t são subconjuntos abertos de M para qualquer t q.c. A aplicação $\xi_t(\cdot) : D_t \rightarrow R_t$ é um homeomorfismo para qualquer t q.c.*

(ii) *As aplicações ξ_t , $\xi_{r,t}$ e ξ_r satisfaz $\xi_t = \xi_{r,t} \circ \xi_r$ sobre D_t para qualquer $r < t$ q.c.*

Para a prova deste Teorema ver H. Kunita [15].

Teorema 2.29. *Suponhamos que os coeficientes X_1, \dots, X_m da equação de Stratonovich dada em (2.3.1) são campos de vetores de classe $C^{k+1, \alpha}$ para $k \geq 1$ e $\alpha > 0$. Suponhamos também que o coeficiente X_0 é um campo de vetores de classe $C^{k, \alpha}$. Então a aplicação $\xi_t : D_t \rightarrow R_t$ é um difeomorfismo de classe $C^{k, \beta}$ para qualquer β menor que α para qualquer t .*

Para a prova deste Teorema ver H. Kunita [15].

O seguinte Corolário é uma consequência imediata do Teorema de acima e o Teorema 2.27.

Corolário 2.30. *Se M é uma variedade compacta, a solução da equação de Stratonovich dada em (2.3.1) define um fluxo de homeomorfismo de M q.c.*

2.4 Fluxos estocásticos atuando sobre campos de tensores

O fluxo estocástico de difeomorfismos determinado por uma equação diferencial estocástica sobre uma variedade diferenciável M atua naturalmente sobre um campo de tensores e define um processo estocástico com valores nos campos de tensores. Nesta seção, estamos interessados em estudar as equações diferenciais estocásticas e a fórmula de Itô governadas por estes processos que tomam valores nos campos de tensores.

Começamos considerando uma equação diferencial estocástica do tipo Stratonovich sobre uma variedade diferenciável M . Sejam $X_1(t), \dots, X_m(t)$ campos de vetores de classe C^2 com parâmetro $t \in [0, T]$. Se consideramos o sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_d) , então os campos são representados como os operadores diferenciais parciais de primeira ordem:

$$X_k(t) = \sum_{i=1}^d a_{k,i}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

em cada vizinhança coordenada, onde $a_{k,i}(t, x)$ são funções de classe C^1 na variável t e de classe C^2 na variável x . Seja $X_0(t)$ um outro campo de vetores tal que $a_{0,i}(t, x)$ é contínua em t e uma função de classe C^1 em x . Logo, a solução da equação de Stratonovich:

$$d\xi_t = \sum_{k=0}^m X_k(t, \xi_t) \diamond dB_t^k,$$

com condição inicial $\xi_0 = x$, é dada via a fórmula de Itô por

$$F(\xi_t(x)) - F(x) = \sum_{k=0}^m \int_0^t X_k(r) F(\xi_r(x)) \diamond dB_r^k,$$

onde $F \in C^3(M)$. Usando a integral de Itô, esta equação é equivalente a

$$F(\xi_t(x)) - F(x) = \sum_{k=1}^m \int_0^t X_k(r) F(\xi_r(x)) dB_r^k + \int_0^t L(r) F(\xi_r(x)) dr.$$

onde $L(t)$ é um operador de segundo ordem definido por

$$L(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m X_k(t)^2 + X_0(t).$$

A existência e unicidade de uma solução maximal $\xi_t(x)$, $0 \leq t < \tau_e(x) \wedge T$ é dada na seção anterior. Começamos nosso estudo para campos de vetores. Seja φ um difeomorfismo na variedade diferenciável M . O diferencial $(\varphi_*)_x$ da aplicação φ é por definição uma aplicação do espaço tangente $T_x(M)$ para o espaço tangente $T_{\varphi(x)}(M)$ tal que:

$$(\varphi_*)_x X_x(f) = X_x(f \circ \varphi), \quad \forall X_x \in T_x(M).$$

Dado um campo de vetores X sobre M , então

$$\begin{aligned} X : M &\rightarrow T(M) \\ x &\mapsto X_x = X(x) \in T_x(M) \end{aligned}$$

Definimos agora um novo campo de vetores $\varphi_* X$ dado por

$$(\varphi_* X)_x = (\varphi_*)_{\varphi^{-1}(x)} X_{\varphi^{-1}(x)}.$$

Desta forma temos que

$$\varphi_* X f(x) = X(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x)), \quad \forall x \in M.$$

para qualquer $f \in C^\infty(M)$. Seja Y um campo de vetores sobre M e φ_t o fluxo de Y , isto é, o grupo a um parâmetro de transformações locais de M gerados por Y :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \varphi_t)(x) = Y f(x),$$

para cada $f \in C^\infty(M)$. A derivada de Lie de um campo de vetores X com respeito a Y é um campo de vetores $L_Y X$ definido por

$$\begin{aligned} L_Y X &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{(\varphi_t^* X)_x - X_x\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{(\varphi_t^*)_{\varphi_t^{-1}(x)} X_{\varphi_t^{-1}(x)} - X_x\} \end{aligned}$$

Este campo de vetores é também dado por:

$$L_Y X = [Y, X] = YX - XY$$

Seja $\xi_t(x)$ a solução da uma equação diferencial estocástica do tipo Stratonovich sobre a variedade M

$$d\xi_t = \sum_{k=0}^m X_k(t, \xi_t) \diamond dB_t^k \quad (2.4.1)$$

Assumimos que esta solução define um fluxo estocástico de difeomorfismos. Logo, a diferencial de $(\xi_t)_*$ esta bem definida para qualquer $0 < t$ quase certamente.

Teorema 2.31. *Assumimos que os coeficientes X_1, \dots, X_m da equação (2.4.1) são campos de vetores sobre M de classe C^5 e X_0 um campo de vetor sobre M de classe C^4 . Então para qualquer campo X sobre M de classe C^3 temos que $(\xi_t)_*$ satisfaz a seguinte fórmula:*

$$(\xi_t)_* X - X = - \sum_{k=0}^m \int_0^t L_{X_k(r)} (\xi_r)_* X \diamond dB_r^k.$$

Para a prova ver o trabalho de H. Kunita [15].

Logo, temos uma fórmula de Itô para o fluxo ξ_t atuando sobre um campo de vetores X sobre a variedade M . Gostaríamos de ter uma fórmula similar para o fluxo ξ_t atuando sobre campos de tensores gerais. Começamos para o caso de uma 1-forma. Seja φ um difeomorfismo sobre a variedade M e seja $(\varphi_*)_x$ o diferencial de φ , que é uma aplicação linear do espaço tangente $T_x(M)$ no espaço tangente $T_{\varphi(x)}(M)$. Denotamos por $(\varphi^*)_x$ sua aplicação dual:

$$\begin{aligned} (\varphi^*)_x : T_{\varphi(x)}(M)^* &\leftrightarrow T_x(M)^* \\ \theta_{\varphi(x)} &\mapsto (\varphi^*)_x \theta_{\varphi(x)} \end{aligned}$$

de modo que

$$\langle (\varphi^*)_x \theta_{\varphi(x)}, X_x \rangle = \langle \theta_{\varphi(x)}, (\varphi_*)_x X_x \rangle,$$

se cumpre para quaisquer $\theta_{\varphi(x)} \in T_{\varphi(x)}(M)^*$ e $X_x \in T_x(M)$. Dada uma 1-forma θ , denotamos por $\varphi^* \theta$ uma 1-forma tal que:

$$(\varphi^* \theta)_x = (\varphi^*)_x \theta_{\varphi(x)}.$$

Então se cumpre que

$$\langle (\varphi^*) \theta, X \rangle_x = \langle \theta, \varphi_* X \rangle_{\varphi(x)}.$$

Seja X um campo de vetores completos e seja φ_t um grupo a um parâmetro de transformações geradas por X .

Definição 2.32. *Seja θ uma 1-forma, então a derivada de Lie para θ é dada por:*

$$L_X \theta = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ (\varphi_t)^* \theta - \theta \}$$

Sejam X e Y campos de vetores sobre M . Temos a seguinte relação para a derivada de Lie:

$$\langle L_X \theta, Y \rangle + \langle \theta, L_X Y \rangle = X(\langle \theta, Y \rangle).$$

Teorema 2.33. *Considere as mesmas condições diferenciáveis para os campos de vetores $X_1(t), \dots, X_m(t)$ como no Teorema (2.31). Então, para qualquer 1-forma θ de classe C^3 , temos que $(\xi_t)^*$ satisfaz a seguinte fórmula do tipo Stratonovich:*

$$(\xi_t)^*\theta - \theta = \sum_{k=1}^m \int_0^t (\xi_t)^* L_{X_k(r)} \theta \diamond dB_r^k.$$

Além, $(\xi_t^{-1})^*$ satisfaz a seguinte fórmula do tipo Stratonovich:

$$(\xi_t^{-1})^*\theta - \theta = - \sum_{k=1}^m \int_0^t L_{X_k(r)} (\xi_t^{-1})^*\theta \diamond dB_r^k.$$

Para a prova ver o trabalho de H. Kunita [15].

Um campo de tensores K do tipo (p, q) é por definição uma aplicação

$$\begin{aligned} K : M &\longrightarrow T_q^p(M) \\ x &\longmapsto K_x = K(x) \in T_q^p(x) \end{aligned}$$

onde

$$T_q^p(x) = T_x(M) \otimes \dots \otimes T_x(M) \otimes T_x(M)^* \otimes \dots \otimes T_x(M)^*$$

onde $T_x(M)$ é dado p -vezes e $T_x(M)^*$ é dado q -vezes. Portanto, para cada $x \in M$, K_x é uma forma multilinear sobre o espaço produto:

$$T_x(M)^* \times \dots \times T_x(M)^* \times T_x(M) \times \dots \times T_x(M).$$

Assim, dadas as 1-formas $\theta^1, \dots, \theta^p$ e os campos de vetores Y_1, \dots, Y_q

$$K_x(\theta^1, \dots, \theta^p, Y_1, \dots, Y_q) (\equiv K_x(\theta_x^1, \dots, \theta_x^p, Y_{1x}, \dots, Y_{qx}))$$

é um campo escalar. Em adiante, assumiremos que este é uma função de classe C^2 .

Seja φ um difeomorfismo sobre a variedade M . Dado um campo de tensores K sobre a variedade M do tipo (p, q) , definimos o campo de vetores $(\varphi)^*K$ pela relação:

$$\begin{aligned} ((\varphi)^*K)_x(\theta^1, \dots, \theta^p, Y^1, \dots, Y^q) \\ = K_{\varphi(x)}(((\varphi)^*)^{-1}\theta^1, \dots, ((\varphi)^*)^{-1}\theta^p, (\varphi)_*Y_1, \dots, (\varphi)_*Y_q). \end{aligned}$$

Seja X um campo de vetores completo e φ_t , com $t \in (-\infty, \infty)$ um grupo a um parâmetro de transformações geradas por X .

Definição 2.34. *A derivada de Lie de um campo de tensores K com respeito a X é definido por*

$$L_X K = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \{(\varphi_t)^* K - K\}.$$

Se K é um campo de tensores do tipo (p, q) , então se cumpre que

$$\begin{aligned} (L_X K)_x(\theta^1, \dots, \theta^p, Y_1, \dots, Y_q) = & X(K_x(\theta^1, \dots, \theta^p, Y^1, \dots, Y^q)) \\ & - \sum_{k=1}^p K_x(\theta^1, \dots, L_X \theta^k, \dots, \theta^p, Y^1, \dots, Y^q) \\ & - \sum_{l=1}^q K_x(\theta^1, \dots, \theta^p, Y^1, \dots, L_X Y_l, \dots, Y^q). \end{aligned}$$

Com esta relação acima, podemos agora calcular a fórmula de Itô para $(\xi_t)^*$ atuando sobre um campo de tensores.

Teorema 2.35. *Assumimos que, os coeficientes X_1, \dots, X_m são campos de vetores sobre M de classe C^5 e X_0 um campo de vetor sobre M de classe C^4 . Então para qualquer campo de tensores K sobre M de classe C^3 temos que $(\xi_t)^*$ satisfaz a seguinte fórmula:*

$$(\xi_t)^* K - K = - \sum_{k=1}^m \int_0^t (\xi_t)^* L_{X_k(r)} K \diamond dB_r^k$$

Para a prova deste Teorema ver o trabalho de H. Kunita [15].

Capítulo 3

A não explosão do $g(t)$ -movimento Browniano via mergulho isométrico

Motivados pelos trabalhos de M. Arnaudon, K.A. Coulibaly, and A. Thalmaier [1] e A.K. Coulibaly [3], no trabalho de Dissertação de Mestrado C. Luque [18] estudamos o movimento Browniano sobre variedades Riemannianas com respeito a uma família de métricas $\{g(t) : t \in I\}$ que dependem diferenciavelmente do tempo. Baseados particularmente na construção do $g(t)$ -movimento Browniano via mergulho isométrico, feita em C. Luque [18]. Neste capítulo, teremos como objetivo achar sob que condições geométricas nosso $g(t)$ -movimento Browniano não explode. Boas referências para o desenvolvimento desde capítulo são M. Arnaudon, K.A. Coulibaly, and A. Thalmaier [1]. A.K. Coulibaly [3], C. Luque [18] e E.P. Hsu [12].

3.1 O $g(t)$ -movimento Browniano via mergulho isométrico

Seja M uma variedade diferenciável compacta, conexa e de dimensão d . Seja $\{g(t) : t \in I\}$ uma família de métricas Riemannianas sobre M dependendo diferenciavelmente do tempo t , tal que $(M, g(t))$ é geometricamente completa para cada $t \in I$. Observamos que o intervalo I pode ser tomado da forma $[0, T]$, $[0, \infty)$ ou \mathbb{R} . Associados a esta família $\{g(t) : t \in I\}$ de métricas temos uma família de conexões de Levi-Civita $\nabla^{g(t)}$ e uma família de operadores Laplace Beltrami $\Delta_{g(t)}$. Sejam também $(\Omega, \{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade filtrado e $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^m)$ o movimento Browniano canônico m -dimensional definido sobre $(\Omega, \{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ onde m não necessariamente é igual a d .

Assim, o $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$ pode ser definido como um processo de difusão gerado pelo gerador infinitesimal $\frac{1}{2}\Delta_{g(t)}$.

Definição 3.1. Fixemos por $(\Omega, \{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade filtrado e $\{g(t) : t \in I\}$ uma família de métricas Riemannianas sobre M dependendo diferenciavelmente do tempo t . Um processo x_t , que toma valores em $(M, g(t))$ é chamado de um $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$, com valor inicial $x \in M$ se para cada $f \in C^\infty(M)$, tem-se que o processo

$$M^f(x_t) = f(x_t) - f(x) - \frac{1}{2} \int_0^t \Delta_{g(s)} f(x_s) ds$$

é um martingale local, para cada $0 \leq t < \tau_e(x)$

Agora, consideramos a variedade produto $N = M \times I$ com $\partial M = \emptyset$ e munimos esta variedade com a métrica h dada por:

$$\begin{aligned} h(x, t): T_{(x,t)}(M \times I) \times T_{(x,t)}(M \times I) &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((X, a\partial_t), (Y, b\partial_t)) &\mapsto g(t)(x)(X, Y) + abf(t)^2 \end{aligned}$$

onde $X, Y \in T(M)$ e $\partial_t \in T(I)$ e $f(t)$ limitada e decrescente em t com $\int_I f^2 dt < \infty$. Observamos que de fato, h define uma métrica em $N = M \times I$. Isto é, que para cada $(x, t) \in N$, $h(x, t)$ é uma forma bilinear, simétrica e definida positiva pois $g(t)(x)$ o é para cada $x \in M$ e cada $t \in I$. Logo, mergulhamos isometricamente a variedade N no espaço euclidiano \mathbb{R}^m , com $m \geq d + 1$. Seja \mathcal{I} o mergulho isométrico:

$$\mathcal{I}: (N, h) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, g_{\text{cân}}).$$

Logo, a aplicação \mathcal{I} é um difeomorfismo sobre sua imagem $\mathcal{I}(N) \subset \mathbb{R}^m$ e sua diferencial $d\mathcal{I}$ dada por:

$$(d\mathcal{I})_{(x,t)}: T_{(x,t)}(N) \longrightarrow T_{\mathcal{I}(x,t)}(\mathbb{R}^m)$$

é injetora para cada $(x, t) \in M \times I$ e é uma isometria, isto é,

$$\begin{aligned} g_{\text{cân}}((d\mathcal{I})_{(x,t)}(X, a\partial_t), (d\mathcal{I})_{(x,t)}(Y, b\partial_t)) &= h(x, t)((X, a\partial_t), (Y, b\partial_t)) \\ &= g(t)(x)(X, Y) + abf(t)^2 g(\partial_t, \partial_t), \end{aligned}$$

para cada $(x, t) \in M \times I$ e quaisquer $(X, a\partial_t), (Y, b\partial_t) \in T_{(x,t)}(N)$. Observamos que a métrica h , em $N = M \times I$, será tomada de modo que N seja mergulhada isometricamente como uma subvariedade de \mathbb{R}^m .

Seja $\{e_1, \dots, e_m\}$ uma base ortonormal canônica do espaço euclidiano \mathbb{R}^m . Então para cada $p = \mathcal{I}(x, t) \in \mathcal{I}(N) \subseteq \mathbb{R}^m$ e cada vetor $e_k \in \mathbb{R}^m$, denotemos por $V_k(p) = V(p)(e_k)$ como a projeção ortogonal do vetor $e_k \in \mathbb{R}^m$ no espaço tangente $T_{\mathcal{I}(x,t)}(\mathcal{I}(N))$. A partir disso, para cada $e_k \in \mathbb{R}^m$ e cada $(x, t) \in M \times I$, definimos os campos $X_k(t)(x)$ dados por:

$$X_k(t)(x) = X_k(x, t) = (d\mathcal{I})^{-1} V_k(x, t). \quad (3.1.1)$$

Observação 3.2. *Seja $M_t = \mathcal{I}(M, t)$ para cada $t \in I$. Consideramos a aplicação:*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_t: (M, g(t)) &\longrightarrow (M_t = \mathcal{I}(M, t), h) \subseteq \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto \mathcal{I}_t(x) = \mathcal{I}(x, t) \end{aligned}$$

Logo, para cada $t \in I$ fixo temos que, $\mathcal{I}_t(x) = \mathcal{I}(x, t)$ é um difeomorfismo sobre sua imagem $M_t = \mathcal{I}(M, t)$ e sua diferencial $(d\mathcal{I}_t)_x = (d\mathcal{I}|_{M_t})_{(x,t)}$ dada por:

$$(d\mathcal{I}_t)_x: T_x(M) \longrightarrow T_{\mathcal{I}_t(x)}(M_t)$$

para cada $x \in M$ é uma isometria que satisfaz

$$h(x, t)((d\mathcal{I}_t)_x(X), (d\mathcal{I}_t)_x(Y)) = g(t)(x)(X, Y).$$

Portanto, para cada $t \in I$, temos que os campos $X_k(t)(x) \in T_x(M, g(t))$ para cada $x \in M$. Logo, podemos considerar a equação diferencial estocástica sobre $(M, g(t))$ dada por:

$$\begin{cases} dx_t = \sum_{k=1}^m X_k(t)(x_t) \diamond dB_t^k, \\ x_0 = x \in M \end{cases} \quad (3.1.2)$$

onde B_t é o movimento Browniano euclidiano m -dimensional. Vamos mostrar que a solução x_t da equação (3.1.2) é nosso $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$. Mas para isso precisamos de alguns resultados prévios, dados a seguir.

Lema 3.3. *Sejam $X_k(t)$ campos de vetores dados pela equação (3.1.1) acima e $\text{grad}_{g(t)} = \nabla^{g(t)}$ o campo gradiente todos eles sobre a variedade $(M, g(t))$. Então,*

$$\text{grad}_{g(t)} f(x) = \sum_{k=1}^m g(t)(x) \left(\nabla^{g(t)} f, X_k(t) \right) X_k(t)(x)$$

para cada $x \in M$ e cada $f \in C^\infty(M, g(t))$.

Demonstração. Sejam $t \in I$ fixo e $f \in C^\infty(M, g(t))$. Denotamos por ∇^{M_t} o campo gradiente na variedade M_t e $V_k(t)(x)$ as projeções ortogonais de \mathbb{R}^m no espaço tangente $T_{\mathcal{I}_t(x)}(M_t)$. Então como $\nabla^{M_t} \in T_{\mathcal{I}_t(x)}(M_t)$, temos:

$$\begin{aligned} \nabla^{M_t}(f \circ (\mathcal{I}_t)^{-1})(x, t) &= \sum_{k=1}^m g_{\text{cân}} \left(\nabla^{M_t}(f \circ (\mathcal{I}_t)^{-1}), e_k \right) e_k \\ &= \sum_{k=1}^m h(x, t) \left(\nabla^{M_t}(f \circ (\mathcal{I}_t)^{-1}), V_k(t) \right) V_k(t). \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Como ∇^{M_t} e $\nabla^{g(t)}$ são os campos gradientes sobre (M_t, h) e $(M, g(t))$ respectivamente, então

$$\begin{aligned} h(x, t) \left(\nabla^{M_t}(f \circ (\mathcal{I}_t)^{-1}), V_k(t) \right) &= V_k(t)(x) (f \circ (\mathcal{I}_t)^{-1})(x, t) \\ &= (d(\mathcal{I}_t)^{-1} V_k(t)(x)) f(x) \\ &= g(t)(x) \left(\nabla^{g(t)} f, d(\mathcal{I}_t)^{-1} V_k(t) \right) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

e como, para cada $t \in I$, \mathcal{I}_t é isometria tem-se que,

$$\nabla^{M_t}(f \circ (\mathcal{I}_t)^{-1})(x, t) = d(\mathcal{I}_t) \nabla^{g(t)} f(x).$$

Usando isto e substituindo a equação (3.1.4) na equação (3.1.3) temos:

$$\begin{aligned} d(\mathcal{I}_t) \nabla^{g(t)} f(x) &= \nabla^{M_t}(f \circ (\mathcal{I}_t)^{-1})(x, t) \\ &= \sum_{k=1}^m h(x, t) \left(\nabla^{M_t}(f \circ (\mathcal{I}_t)^{-1}), V_k(t) \right) V_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^m g(t)(x) \left(\nabla^{g(t)} f, d(\mathcal{I}_t)^{-1} V_k(t) \right) V_k(t). \end{aligned}$$

De onde, considerando a Observação 3.2, claramente obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla^{g(t)} f(x) &= \sum_{k=1}^m g(t)(x) \left(\nabla^{g(t)} f, d(\mathcal{I}_t)^{-1} V_k(t) \right) d(\mathcal{I}_t)^{-1} V_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^m g(t)(x) \left(\nabla^{g(t)} f, X_k(t) \right) X_k(t). \end{aligned}$$

□

Sobre a variedade $M_t = \mathcal{I}_t(M)$ definimos a aplicação ∇^{M_t} dada por:

$$\begin{aligned} \nabla^{M_t} : T(M_t) \times T(M_t) &\longrightarrow T(M_t) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X^{M_t} Y = \text{projecção de } \widetilde{\nabla}_X Y \text{ para } T_{\mathcal{I}_t(x)}(M_t) \end{aligned}$$

onde $\widetilde{\nabla}$ denota a derivada covariante canônica do espaço euclidiano \mathbb{R}^m . Claramente se verifica que ∇^{M_t} é uma conexão de Levi-Civita sobre a variedade M_t . O que significa que, ∇^{M_t} é simétrica e compatível com a métrica h em M_t . Logo, para cada $V_k(t)(x) \in T_{\mathcal{I}_t(x)}(M_t)$, temos pela definição de divergência:

$$\operatorname{div}_{M_t} V_k(t)(x) = \sum_{i=1}^d h(x, t) \left(\nabla_{Y_i}^{M_t} V_k(t), Y_i \right),$$

onde $\{Y_1, \dots, Y_d\}$ é qualquer base ortonormal de $T_{\mathcal{I}_t(x)}(M_t)$.

Lema 3.4. *Com as notações de acima, temos que o div_{M_t} satisfaz:*

$$\sum_{k=1}^m (\operatorname{div}_{M_t} V_k(t)) V_k(t) = 0.$$

Demonstração. Seja $\{y_i\}$ um sistema de coordenadas normais de M_t no ponto $y = \mathcal{I}_t(x)$ induzida pela aplicação exponencial e sejam $\{Y_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, Y_d = \frac{\partial}{\partial y_d}\}$. Logo, a derivada covariante $\widetilde{\nabla}_{Y_i} Y_j$ no espaço euclidiano \mathbb{R}^m é perpendicular a M_t , pois $\nabla_{Y_i}^{M_t} Y_j = 0$ no ponto $y = \mathcal{I}_t(x)$.

Portanto, usando o fato que ∇^{M_t} é compatível com a métrica h na variedade M_t , tem-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (\operatorname{div}_{M_t} V_k(t)) V_k(t) &= \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^d h(x, t) \left(\nabla_{Y_i}^{M_t} V_k(t), Y_i \right) \right\} V_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^d Y_i h(x, t) \left(V_k(t), Y_i \right) \right\} V_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^d Y_i g_{\text{cân}}(e_k, Y_i) \right\} V_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^d g_{\text{cân}}(e_k, \widetilde{\nabla}_{Y_i} Y_i) \right\} V_k(t) \\ &= \text{a projecção de } \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^d g_{\text{cân}}(e_k, \widetilde{\nabla}_{Y_i} Y_i) \right\} e_k \\ &= \text{a projecção de } \sum_{i=1}^d \widetilde{\nabla}_{Y_i} Y_i \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Logo, obtemos o seguinte Lema.

Lema 3.5. *Sejam $X_k(t)$ campos de vetores sobre $(M, g(t))$ dados pela equação (3.1.1) acima e $\operatorname{div}_{g(t)}$ a divergência na variedade $(M, g(t))$. Então,*

$$\sum_{k=1}^m (\operatorname{div}_{g(t)} X_k(t)) X_k(t) = 0,$$

para cada $x \in M$.

Demonstração. Seja $x \in M$ e $\{X_1, \dots, X_d\}$ uma base ortonormal de $T_x(M)$. Então, para cada $t \in I$ temos que $\{Y_1 = d(\mathcal{I}_t)X_1, \dots, Y_d = d(\mathcal{I}_t)X_d\}$ constitui uma base ortonormal do espaço tangente $T_{\mathcal{I}_t(x)}(M_t)$, pois $d(\mathcal{I}_t)_x : T_x(M) \rightarrow T_{\mathcal{I}_t(x)}(M_t)$ é um isomorfismo para cada $t \in I$ e

$$\delta_{ij} = g(t)(x)(X_i, X_j) = h(x, t)(d(\mathcal{I}_t)_x X_i, d(\mathcal{I}_t)_x X_j).$$

Tomamos $\{X_i\}$ de modo que $\{Y_i = d(\mathcal{I}_t)X_i\}$ seja como no Lema 3.4. Assim, bastará tomar $\{X_i = d(\mathcal{I}_t)^{-1}Y_i\}$ e utilizando a fórmula:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Y X, Z \rangle &= \frac{1}{2} \left\{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \right\}, \end{aligned}$$

dada em M.P. Do Carmo [4]. Obtemos que

$$\begin{aligned} g(t)(x) \left(\nabla_{d(\mathcal{I}_t)^{-1}Y_i}^{g(t)} X_k(t), d(\mathcal{I}_t)^{-1}Y_i \right) &= \frac{1}{2} \left\{ X_k(t) g(t)(x) \left(d(\mathcal{I}_t)^{-1}Y_i, d(\mathcal{I}_t)^{-1}Y_i \right) \right. \\ &\quad \left. - 2g(t)(x) \left([X_k(t), d(\mathcal{I}_t)^{-1}Y_i], d(\mathcal{I}_t)^{-1}Y_i \right) \right\} \\ &= -g(t)(x) \left(\left[d(\mathcal{I}_t)^{-1}V_k(t), d(\mathcal{I}_t)^{-1}Y_i \right], d(\mathcal{I}_t)^{-1}Y_i \right) \\ &= -g(t)(x) \left(d(\mathcal{I}_t)^{-1} [V_k(t), Y_i], d(\mathcal{I}_t)^{-1}Y_i \right) \\ &= -h(x, t) \left([V_k(t), Y_i], Y_i \right). \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Portanto, usando a equação (3.1.5) temos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (\operatorname{div}_{g(t)} X_k(t)) X_k(t) &= \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^d g(t)(x) \left(\nabla_{d(\mathcal{I}_t)^{-1}Y_i}^{g(t)} X_k(t), d(\mathcal{I}_t)^{-1}Y_i \right) \right\} X_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^d -h(x, t) \left([V_k(t), Y_i], Y_i \right) \right\} d(\mathcal{I}_t)^{-1}V_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^d h(x, t) \left(\nabla_{Y_i}^{M_t} V_k(t), Y_i \right) \right\} d(\mathcal{I}_t)^{-1}V_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^m (\operatorname{div}_{M_t} V_k(t)) d(\mathcal{I}_t)^{-1}V_k(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Agora, voltando ao objetivo desta seção, vamos mostrar que o processo solução x_t da equação diferencial estocástica (3.1.2) é o $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$. Como o processo solução x_t é gerado pelo operador $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m X_k^2(t)$, e como queremos que x_t satisfaça a Definição 3.1 e portanto seja o $g(t)$ -movimento Browniano. Isto nos motiva o seguinte Teorema:

Teorema 3.6. *Sejam $X_k(t)$ campos de vetores sobre $(M, g(t))$ dados pela equação (3.1.1). Então a solução x_t da equação diferencial estocástica:*

$$\begin{cases} dx_t = \sum_{k=1}^m X_k(t)(x_t) \diamond dB_t^k, \\ x_0 = x \in M \end{cases} \quad (3.1.6)$$

é o $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$.

Demonstração. Pela Definição 3.1, o processo x_t será um $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$ se, para cada $f \in C^\infty(M)$ tem-se que:

$$d(f(x_t)) \stackrel{d\mathcal{M}}{=} \frac{1}{2} \Delta_{g(t)} f(x_t) dt, \quad (3.1.7)$$

onde " $\stackrel{d\mathcal{M}}{=}$ " denota igualdade a menos de martingale local. Para mostrar isto seja $f \in C^\infty(M)$. Aplicando a fórmula de Itô a $f(x_t)$ obtemos que

$$\begin{aligned} d(f(x_t)) &= \sum_{i=1}^m X_i(t) f(x_t) dB_t^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n X_i(t) X_j(t) f(x_t) \langle dB^i, dB^j \rangle_t \\ &\stackrel{d\mathcal{M}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m X_i^2(t) f(x_t) dt. \end{aligned}$$

Assim, para mostrar o Teorema bastará verificar que:

$$\Delta_{g(t)} f(x) = \sum_{i=1}^m X_i^2(t) f(x). \quad (3.1.8)$$

De fato, sejam $x \in M$ e $f \in C^\infty(M)$ então pelo Lema 3.3 temos

$$\text{grad}_{g(t)} f(x) = \sum_{k=1}^m g(t)(x) \left(\nabla^{g(t)} f, X_k(t) \right) X_k(t)(x).$$

Logo tomando divergência a ambos membros da equação anterior temos:

$$\Delta_{g(t)} f(x) = \sum_{k=1}^m X_k^2(t) f(x) + \sum_{k=1}^m (\text{div}_{g(t)} X_k(t)) X_k(t) f(x),$$

mas pelo Lema 3.5 o último termo da equação anterior se anula. □

Corolário 3.7. *Nas condições do Teorema 3.6, temos que:*

$$\Delta_{g(t)} f = \sum_{\alpha=1}^m \left(\nabla^{g(t)} \right)^2 f \left(X_\alpha(t), X_\alpha(t) \right).$$

Demonstração. Seja $\{W_1(x), \dots, W_d(x)\}$ uma base ortonormal de $T_x M$, então $\{Y_i = (d\mathcal{I}_t)W_i\}$ constitui uma base ortonormal para $T_{\mathcal{I}_t(x)}(\mathcal{I}_t(M))$. Logo, pelo Lema 3.3 temos:

$$\begin{aligned} (d\mathcal{I}_t)W_i(x) &= \sum_{\alpha=1}^m h(x, t) \left((d\mathcal{I}_t)W_i, V_\alpha(t) \right) V_\alpha(t) \\ &= \sum_{\alpha=1}^m g(t)(x) \left(W_i, (d\mathcal{I}_t)^{-1}V_\alpha(t) \right) V_\alpha(t). \end{aligned}$$

Assim

$$W_i(x) = \sum_{\alpha=1}^m g(t)(x) \left(W_i, X_\alpha(t) \right) X_\alpha(t).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta_{g(t)}f &= \sum_{i=1}^d \left(\nabla^{g(t)} \right)^2 f(W_i, W_i) \\ &= \sum_{i=1}^d \left(\nabla^{g(t)} \right)^2 f \left(\sum_{\alpha=1}^m g(t) \left(W_i, X_\alpha(t) \right) X_\alpha(t), \sum_{\beta=1}^m g(t) \left(W_i, X_\beta(t) \right) X_\beta(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{\alpha, \beta=1}^m \left(\nabla^{g(t)} \right)^2 f(X_\alpha(t), X_\beta(t)) g(t) \left(W_i, X_\alpha(t) \right) g(t) \left(W_i, X_\beta(t) \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m \left(\nabla^{g(t)} \right)^2 f(X_\alpha(t), X_\beta(t)) g(t) \left(\sum_{i=1}^d g(t) \left(W_i, X_\alpha(t) \right) W_i, X_\beta(t) \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m \left(\nabla^{g(t)} \right)^2 f(X_\alpha(t), X_\beta(t)) g(t) \left(X_\alpha(t), X_\beta(t) \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \left(\nabla^{g(t)} \right)^2 f \left(X_\alpha(t), \sum_{\beta=1}^m g(t) \left(X_\alpha(t), X_\beta(t) \right) X_\beta(t) \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \left(\nabla^{g(t)} \right)^2 f \left(X_\alpha(t), X_\alpha(t) \right). \end{aligned}$$

□

3.2 Exemplos do $g(t)$ -movimento Browniano

Nesta seção, apresentaremos alguns exemplos da construção do $g(t)$ -movimento Browniano sobre algumas variedades conhecidas como o toro, a esfera e o cilindro.

3.2.1 O $g(t)$ -movimento Browniano sobre o Toro

Consideramos o Toro de dimensão 2, dado por

$$\mathbb{T}^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x(\theta, \varphi), y = y(\theta, \varphi) \text{ e } z = z(\theta, \varphi) \text{ com } \theta, \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$$

onde

$$x(\theta, \varphi) = (r_1 + r_2 \cos \varphi) \cos \theta$$

$$y(\theta, \varphi) = (r_1 + r_2 \cos \varphi) \sin \theta$$

$$z(\theta, \varphi) = r_2 \sin \varphi$$

com $r_1 > r_2$. Logo, os elementos de \mathbb{T}^2 são dados pelos pontos $p = p(\theta, \varphi)$. Equipamos \mathbb{T}^2 com uma família de métricas $\{g(t) : t \geq 0\}$ dada por

$$g(t) = (r_1 + r_2(t) \cos \varphi)^2 d\theta^2 + r_2(t)^2 d\varphi^2,$$

onde $r_2(t) = r_2 e^{-t}$ com $r_1 - r_2 > 0$. Queremos construir o $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(\mathbb{T}^2, g(t))$, para cada $t \in [0, \infty)$. Para isto, consideramos a variedade produto $\mathbb{T}^2 \times [0, \infty)$ munida da métrica h que é dada por

$$h(x, t)((V, a\partial_t), (W, b\partial_t)) = g(t)(x)(V, W) + abf(t)^2,$$

onde $V, W \in T(\mathbb{T}^2)$ e $\partial_t \in T([0, \infty))$ e $f(t) = r_2 e^{-t}$. Logo a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : (\mathbb{T}^2 \times [0, \infty), h) &\hookrightarrow (\mathbb{R}^3, g_{\text{cân}}) \\ (p, t) &\mapsto ((r_1 + r_2 e^{-t} \cos \varphi) \cos \theta, (r_1 + r_2 e^{-t} \cos \varphi) \sin \theta, r_2 e^{-t} \sin \varphi) \end{aligned}$$

é um mergulho isométrico para cada $p = p(\theta, \varphi) \in \mathbb{T}^2$ e $t \in [0, \infty)$. Isto é, que sua derivada $d\psi$ dada por:

$$d\psi : T(\mathbb{T}^2 \times [0, \infty)) \hookrightarrow T(\mathbb{R}^3)$$

é isometria. Pois

$$\partial_\theta(t) = d\psi_t(\partial_\theta) = (- (r_1 + r_2 e^{-t} \cos \varphi) \sin \theta, (r_1 + r_2 e^{-t} \cos \varphi) \cos \theta, 0)$$

$$\partial_\varphi(t) = d\psi_t(\partial_\varphi) = (- r_2 e^{-t} \sin \varphi \cos \theta, - r_2 e^{-t} \sin \varphi \sin \theta, r_2 e^{-t} \cos \varphi)$$

$$\partial_t = d\psi_t(\partial_t) = (- r_2 e^{-t} \cos \varphi \cos \theta, - r_2 e^{-t} \cos \varphi \sin \theta, - r_2 e^{-t} \sin \varphi)$$

de onde

$$g_{\text{cân}}(\partial_\theta(t), \partial_\theta(t)) = (r_1 + r_2 e^{-t} \cos \varphi)^2$$

$$g_{\text{cân}}(\partial_\theta(t), \partial_\varphi(t)) = 0$$

$$g_{\text{cân}}(\partial_\theta(t), \partial_t) = 0$$

$$g_{\text{cân}}(\partial_\varphi(t), \partial_\varphi(t)) = (r_2 e^{-t})^2$$

$$g_{\text{cân}}(\partial_\varphi(t), \partial_t) = 0$$

$$g_{\text{cân}}(\partial_t, \partial_t) = (r_2 e^{-t})^2$$

Logo

$$\begin{aligned} g_{\text{cân}}(d\psi, d\psi) &= (r_1 + r_2 e^{-t} \cos \varphi)^2 d\theta^2 + (r_2 e^{-t})^2 d\varphi^2 + (r_2 e^{-t})^2 dt^2 \\ &= g(t) + f(t)^2. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbb{T}^2 \times [0, \infty)$ é mergulhado isometricamente em \mathbb{R}^3 , via a isometria ψ . Agora, para cada $t \in [0, \infty)$ fixo, temos que a aplicação ψ_t dada por:

$$\begin{aligned} \psi_t : (\mathbb{T}^2, g(t)) &\hookrightarrow (\mathbb{T}_t^2 = \psi_t(\mathbb{T}^2), h) \\ p &\mapsto ((r_1 + r_2 e^{-t} \cos \varphi) \cos \theta, (r_1 + r_2 e^{-t} \cos \varphi) \sin \theta, r_2 e^{-t} \sin \varphi) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo sobre sua imagem. Observamos que para cada $t \in [0, \infty)$ o conjunto de vetores $\{\partial_\theta(t), \partial_\varphi(t), \partial_t\}$ no espaço tangente $T(\mathbb{T}_t^2) \subset \mathbb{R}^3$ é linearmente independente. Então, podemos escrever

$$e_1 = (1, 0, 0) = a_1(p, t) \partial_\theta(t) + b_1(p, t) \partial_\varphi(t) + c_1(p, t) \partial_t.$$

Denotemos por:

$$R(t, \varphi) = r_1 + r_2 e^{-t} \cos \varphi$$

$$S(t, \varphi) = -r_2 e^{-t} \sin \varphi$$

$$T(t, \varphi) = -r_2 e^{-t} \cos \varphi$$

Então,

$$\partial_\theta(t) = (-R(t, \varphi) \sin \theta, R(t, \varphi) \cos \theta, 0)$$

$$\partial_\varphi(t) = (S(t, \varphi) \cos \theta, S(t, \varphi) \sin \theta, -T(t, \varphi))$$

$$\partial_t = (T(t, \varphi) \cos \theta, T(t, \varphi) \sin \theta, S(t, \varphi))$$

Logo,

$$\begin{cases} 1 = -a_1(p, t) R(t, \varphi) \sin \theta + b_1(p, t) S(t, \varphi) \cos \theta + c_1(p, t) T(t, \varphi) \cos \theta \\ 0 = a_1(p, t) R(t, \varphi) \cos \theta + b_1(p, t) S(t, \varphi) \sin \theta + c_1(p, t) T(t, \varphi) \sin \theta \\ 0 = -b_1(p, t) T(t, \varphi) + c_1(p, t) S(t, \varphi) \end{cases}$$

de onde temos que $a_1(p, t)$ é dado pela equação:

$$\begin{aligned} a_1(p, t) &= \frac{-\sin \theta}{R(t, \varphi)} \\ &= \frac{-\sin \theta}{r_1 + r_2 e^{-t} \cos \varphi}. \end{aligned}$$

E também que $b_1(p, t)$ é dado pela equação:

$$\begin{aligned} b_1(p, t) &= \frac{S(t, \varphi) \cos \theta}{T(t, \varphi)^2 + S(t, \varphi)^2} \\ &= \frac{-\sin \varphi \cos \theta}{r_2 e^{-t}} \end{aligned}$$

e $c_1(p, t)$ é dado pela equação:

$$\begin{aligned} c_1(p, t) &= \frac{T(t, \varphi) \cos \theta}{T(t, \varphi)^2 + S(t, \varphi)^2} \\ &= \frac{-\cos \varphi \cos \theta}{r_2 e^{-t}}. \end{aligned}$$

Mas $\partial_t \perp T_{\psi_t(p)}\mathbb{T}_t^2$. Assim, teremos que a projeção ortogonal de $e_1 \in \mathbb{R}^3$ ao espaço tangente $T_{\psi_t(p)}(\mathbb{T}_t^2)$ é dada por;

$$V(p)(e_1) = P_{T_{\psi_t(p)}(\mathbb{T}_t^2)}(1, 0, 0) = a_1(p, t) \partial_\theta(t) + b_1(p, t) \partial_\varphi(t).$$

Pois $T_{\psi_t(p)}(\mathbb{T}_t^2) = \text{gen}\{\partial_\theta(t), \partial_\varphi(t)\}$. Daqui, para cada $t \in [0, \infty)$ fixo, definimos o campos de vetores $X_1(t)(p) = X(t)(e_1)(p)$ no espaço tangente $T_p(\mathbb{T}^2, g(t))$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} X_1(t)(p) &= a_1(t)(p) \partial_\theta + b_1(t)(p) \partial_\varphi \\ &= -\frac{\sin \theta}{r_1 + r_2 e^{-t} \cos \varphi} \partial_\theta - \frac{\sin \varphi \cos \theta}{r_2 e^{-t}} \partial_\varphi \end{aligned}$$

de onde observamos que:

$$\begin{aligned} d\psi_t(X_1) &= a_1(t)(p) d\psi_t(\partial_\theta) + b_1(t)(p) d\psi_t(\partial_\varphi) \\ &= a_1(t)(p) \partial_\theta(t) + b_1(t)(p) \partial_\varphi(t). \end{aligned}$$

De maneira análoga, passamos a definir os campos $X_2(t) = X(t)(e_2)$ e $X_3(t) = X(t)(e_3)$. Assim, para $(0, 1, 0) = a_2(p, t) \partial_\theta(t) + b_2(p, t) \partial_\varphi(t) + c_2(p, t) \partial_t$ temos que:

$$\begin{cases} 0 = -a_2(p, t)R(t, \varphi) \sin \theta + b_2(p, t)S(t, \varphi) \cos \theta + c_2(p, t)T(t, \varphi) \cos \theta \\ 1 = a_2(p, t)R(t, \varphi) \cos \theta + b_2(p, t)S(t, \varphi) \sin \theta + c_2(p, t)T(t, \varphi) \sin \theta \\ 0 = -b_2(p, t)T(t, \varphi) + c_2(p, t)S(t, \varphi), \end{cases}$$

de onde temos que $a_2(p, t)$ é dado pela equação:

$$\begin{aligned} a_2(p, t) &= \frac{\cos \theta}{R(t, \varphi)} \\ &= \frac{\cos \theta}{r_1 + r_2 e^{-t} \cos \varphi}, \end{aligned}$$

também que $b_2(p, t)$ é dado pela equação:

$$\begin{aligned} b_2(p, t) &= \frac{S(t, \varphi) \sin \theta}{T(t, \varphi)^2 + S(t, \varphi)^2} \\ &= \frac{-\sin \varphi \sin \theta}{r_2 e^{-t}} \end{aligned}$$

e $c_2(p, t)$ é dado pela equação:

$$\begin{aligned} c_2(p, t) &= \frac{T(t, \varphi) \sin \theta}{T(t, \varphi)^2 + S(t, \varphi)^2} \\ &= \frac{-\cos \varphi \sin \theta}{r_2 e^{-t}}. \end{aligned}$$

Logo, o campo $X_2(t)(p)$ no espaço tangente $T_p(\mathbb{T}^2, g(t))$ é dado por:

$$X_2(t)(p) = \frac{\cos \theta}{r_1 + r_2 e^{-t} \cos \varphi} \partial_\theta - \frac{\sin \varphi \sin \theta}{r_2 e^{-t}} \partial_\varphi.$$

Por último, para $(0, 0, 1) = a_3(p, t) \partial_\theta(t) + b_3(p, t) \partial_\varphi(t) + c_3(p, t) \partial_t$ temos que:

$$\begin{cases} 0 = -a_3(p, t)R(t, \varphi) \sin \theta + b_3(p, t)S(t, \varphi) \cos \theta + c_3(p, t)T(t, \varphi) \cos \theta \\ 0 = a_3(p, t)R(t, \varphi) \cos \theta + b_3(p, t)S(t, \varphi) \sin \theta + c_3(p, t)T(t, \varphi) \sin \theta \\ 1 = -b_3(p, t)T(t, \varphi) + c_3(p, t)S(t, \varphi) \end{cases}$$

Temos que $a_3(p, t)$ é dado pela equação:

$$a_3(p, t) = 0,$$

também que $b_3(p, t)$ é dado pela equação:

$$\begin{aligned} b_3(p, t) &= \frac{-T(t, \varphi)}{T(t, \varphi)^2 + S(t, \varphi)^2} \\ &= \frac{\cos \varphi}{r_2 e^{-t}} \end{aligned}$$

e $c_3(p, t)$ é dado pela equação:

$$\begin{aligned} c_3(p, t) &= \frac{S(t, \varphi)}{T(t, \varphi)^2 + S(t, \varphi)^2} \\ &= \frac{-\sin \varphi}{r_2 e^{-t}}. \end{aligned}$$

Logo, o campo $X_3(t)(p)$ no espaço tangente $T_p(\mathbb{T}^2, g(t))$ é dado por:

$$X_3(t)(p) = \frac{\cos \varphi}{r_2 e^{-t}} \partial_\varphi.$$

Portanto, o $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(\mathbb{T}^2, g(t))$, é dado pela solução da equação

$$(\theta_t, \varphi_t) = (\theta_0, \varphi_0) + \int_0^t X_\alpha(s)((\theta_s, \varphi_s)) \diamond dB_s^\alpha,$$

onde $\alpha = 1, 2, 3$ e com $(\theta_s, \varphi_s) \in (\mathbb{T}^2, g(t))$. A saber, $d\theta_t$ e $d\varphi_t$ são dados por:

$$\begin{aligned} d\theta_t &= -\frac{\sin \theta}{r_1 + r_2 e^{-t} \cos \varphi} \diamond dB_t^1 + \frac{\cos \theta}{r_1 + r_2 e^{-t} \cos \varphi} \diamond dB_t^2 \\ d\varphi_t &= -\frac{\sin \varphi \cos \theta}{r_2 e^{-t}} \diamond dB_t^1 - \frac{\sin \varphi \sin \theta}{r_2 e^{-t}} \diamond dB_t^2 + \frac{\cos \varphi}{r_2 e^{-t}} \diamond dB_t^3 \end{aligned}$$

3.2.2 O $g(t)$ -movimento Browniano sobre a esfera

Seja $S^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1}, |x|^2 = 1\}$ a esfera de dimensão d . Equipamos a S^d com uma família de métricas $\{g(t) = (1+t)^2 g_{\text{cân}}; t \in I\}$ que dependem diferenciavelmente do tempo, onde $g_{\text{cân}}$ é a métrica no espaço euclidiano. Queremos construir o $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(S^d, g(t))$, para cada $t \in I$. Para isto, consideramos a variedade produto $S^d \times I$ com a métrica h dada por:

$$h(x, t)((V, a\partial_t), (W, b\partial_t)) = g(t)(x)(V, W) + abf(t)^2,$$

onde $V, W \in T(S^d)$ e $\partial_t \in T(I)$ e $f(t)$ é limitada e decrescente em t com $\int_0^\infty f^2 dt < \infty$, de modo que

$$\begin{aligned} \varphi : (S^d \times I, h) &\hookrightarrow (\mathbb{R}^{d+1}, g_{\text{cân}}) \\ (x, t) &\mapsto f(t)x = (1+t) \cdot x \end{aligned}$$

é um mergulho isométrico. Isto é,

$$d\varphi : T(S^d \times I) \hookrightarrow T(\mathbb{R}^{d+1})$$

é uma isometria. De fato, para $(x, t) \in S^d \times I$ sejam $v, w \in T_{(x,t)}(S^d \times I)$, de modo que $(V(s), \alpha(s))$ e $(W(s), \beta(s))$ sejam curvas em $S^n \times I$, tais que

$$v = (\dot{V}(0), \dot{\alpha}(0)) \quad \text{e} \quad w = (\dot{W}(0), \dot{\beta}(0)),$$

onde $V(0) = W(0) = x$. Assim,

$$\begin{aligned} d\varphi \cdot v &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \varphi(V(s), \alpha(s)) \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} f(\alpha(s)) \cdot V(s) \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (1 + \alpha(s)) \cdot V(s) \\ &= (1 + \alpha(0)) \cdot \dot{V}(0) + \dot{\alpha}(0)x. \end{aligned}$$

Da mesma forma, para $w = (\dot{W}(0), \dot{\beta}(0))$ temos que $d\varphi \cdot w = (1 + \beta(0)) \cdot \dot{W}(0) + \dot{\beta}(0)x$. Então,

$$\begin{aligned} g_{\text{cân}}(d\varphi \cdot v, d\varphi \cdot w) &= g_{\text{cân}}((1 + \alpha(0)) \cdot \dot{V}(0) + \dot{\alpha}(0)x, (1 + \beta(0)) \cdot \dot{W}(0) + \dot{\beta}(0)x) \\ &= (1 + t)^2 g_{\text{cân}}(\dot{V}(0), \dot{W}(0)) + \dot{\alpha}(0) \cdot \dot{\beta}(0) g_{\text{cân}}(x, x) \\ &= (1 + t)^2 g_{\text{cân}}(\dot{V}(0), \dot{W}(0)) + \dot{\alpha}(0) \cdot \dot{\beta}(0) \\ &= h(x, t)((\dot{V}(0)), (\dot{\alpha}(0)), (\dot{W}(0)), (\dot{\beta}(0))) \\ &= h(x, t)(u, v). \end{aligned}$$

Portanto, $S^d \times I$ é mergulhado isometricamente em \mathbb{R}^{d+1} , via a isometria φ . Agora, para cada $t \in I$ fixo, temos que a aplicação φ_t dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_t : (S^d, g(t)) &\hookrightarrow (S_t^d = \varphi_t(S^d), h) \\ x &\mapsto f(t)x = (1+t) \cdot x \end{aligned}$$

é um difeomorfismo sobre sua imagem e satisfaz:

$$\begin{aligned} d\varphi_t(V) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \varphi_t(X(s)) \\ &= f(t) \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} X(s) \\ &= f(t)V. \end{aligned}$$

Logo, para cada $t \in I$ e cada $x \in S^d$ consideramos a projeção ortogonal de \mathbb{R}^{d+1} ao espaço tangente $T_{\varphi_t(x)}(S_t^d)$ como sendo;

$$V_k(y) = V(y)(e_k) = e_k - \frac{g_{\text{cân}}(e_k, y)}{g_{\text{cân}}(y, y)} \cdot y.$$

Daqui, para cada $t \in I$, definimos os campos de vetores no espaço tangente $T_x(S^d, g(t))$ da seguinte forma

$$X_k(t)(x) := (d\varphi_t)^{-1}(V_k(x, t)).$$

Logo, como $(\varphi_t)^{-1}(y) = \frac{1}{f(t)}y$ temos

$$\begin{aligned} X(t)(x)(e_k) &= \frac{1}{f(t)}V_k(x, t) \\ &= \frac{1}{f(t)}(e_k - g_{\text{cân}}(e_k, x) \cdot x) \\ &= \frac{1}{t+1}(e_k - g_{\text{cân}}(e_k, x) \cdot x). \end{aligned}$$

Assim para $\{e_k\}$ uma base canônica de \mathbb{R}^{d+1} e cada $x \in S^d$, a matriz de $X(t)(x)$ é dada por:

$$\begin{aligned} g(t)(x)(X(t)(e_\alpha), e_\beta) &= (1+t)^2 g_{\text{cân}}(X(t)(e_\alpha), e_\beta) \\ &= (1+t)^2 g_{\text{cân}}\left(\frac{1}{t+1}(e_\alpha - g_{\text{cân}}(e_\alpha, x) \cdot x), e_\beta\right) \\ &= (1+t) g_{\text{cân}}\left((e_\alpha - g_{\text{cân}}(e_\alpha, x) \cdot x), e_\beta\right) \\ &= (1+t) \delta_{\alpha, \beta} - (1+t)x_\alpha \cdot x_\beta. \end{aligned}$$

Portanto, o $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(S^d, g(t))$, está dado pela solução da equação

$$x_t^\alpha = x_0^\alpha + \int_0^t ((1+s)\delta_{\alpha, \beta} - (1+s)x_s^\alpha \cdot x_s^\beta) \diamond dB_s^\beta,$$

com $x_0 = \{x_0^\alpha; \alpha = 1, \dots, d+1\} \in (S^d, g(t))$.

3.2.3 O $g(t)$ -movimento Browniano sobre o cilindro

Consideramos o cilindro de dimensão d , dado por

$$\mathcal{C}^d = \left\{x = (x_1, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}, \sum_{i=1}^d x_i^2 = 1\right\}.$$

Equipamos a \mathcal{C}^d com uma família de métricas $\{g(t) = (1+t)^2 g_{\text{cân}} + vw; t \in [0, T]\}$ para alguns v e w em \mathbb{R} , onde $g_{\text{cân}}$ é a métrica no espaço euclidiano. Queremos construir o $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(\mathcal{C}^d, g(t))$, para cada $t \in I$. Para isto, consideramos a variedade produto $\mathcal{C}^d \times I$ munida da métrica h que é dada por:

$$h(x, t)((\vec{v}, v_{n+1}), a\partial_t), ((\vec{w}, w_{n+1}), b\partial_t) = (t+1)^2 g_{\text{cân}}(\vec{v}, \vec{w}) + v_{n+1} \cdot w_{n+1} + abf(t)^2$$

para $v = (\vec{v}, v_{n+1})$, $w = (\vec{w}, w_{n+1})$ em $T_p \mathcal{C}^n$ e $\partial_t \in T(I)$ e $f(t)$ é limitada e crescente em t com $\int_0^\infty f^2 dt < \infty$, de modo que

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathcal{C}^d \times I, h) &\hookrightarrow (\mathbb{R}^{d+1}, g_{\text{cân}}) \\ ((\vec{x}, x_{n+1}), t) &\mapsto f(t)(\vec{x}, x_{n+1}) = ((1+t)\vec{x}, x_{n+1}) \end{aligned}$$

é um mergulho isométrico. Isto é, que sua derivada $d\varphi$ dada por:

$$d\varphi : T(\mathcal{C}^d \times I) \hookrightarrow T(\mathbb{R}^{d+1})$$

é isometria. De fato, para $(x, t) \in \mathcal{C}^d \times I$ com $x = (\vec{x}, x_{d+1})$, sejam $u, v \in T_{(x,t)}(\mathcal{C}^d \times I)$ de modo que $((\vec{X}(s), X_{d+1}(s)), \alpha(s))$ e $((\vec{Y}(s), Y_{d+1}(s)), \beta(s))$ sejam curvas em $\mathcal{C}^d \times I$, tais que

$$u = ((\dot{\vec{X}}(0), \dot{X}_{d+1}(0)), \dot{\alpha}(0)) \quad \text{e} \quad v = ((\dot{\vec{Y}}(0), \dot{Y}_{d+1}(0)), \dot{\beta}(0))$$

onde $(\vec{X}(0), X_{d+1}(0)) = (\vec{x}, x_{d+1}) = (\vec{Y}(0), Y_{d+1}(0))$.

Assim,

$$\begin{aligned} d\varphi \cdot u &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi(X(s), \alpha(s)) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f(\alpha(s)) \cdot X(s) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} ((1 + \alpha(s)) \vec{X}(s), X_{d+1}(s)) \\ &= (\dot{\vec{X}}(0) + \dot{\alpha}(0) \vec{X}(0) + \alpha(0) \dot{\vec{X}}(0), \dot{X}_{d+1}(0)) \\ &= \dot{\alpha}(0)(\vec{x}, 0) + ((1 + t) \dot{\vec{X}}(0), \dot{X}_{d+1}(0)). \end{aligned}$$

Da mesma forma, para $v = ((\dot{\vec{Y}}(0), \dot{Y}_{d+1}(0)), \dot{\beta}(0))$ temos que $d\varphi \cdot v = \dot{\beta}(0)(\vec{x}, 0) + ((1 + t) \dot{\vec{Y}}(0), \dot{Y}_{d+1}(0))$. De onde,

$$\begin{aligned} g_{\text{cân}}(d\varphi \cdot u, d\varphi \cdot v) &= g_{\text{cân}}(\dot{\alpha}(0)(\vec{x}, 0) + ((1 + t) \dot{\vec{X}}(0), \dot{X}_{d+1}(0)), \dot{\beta}(0)(\vec{x}, 0) \\ &\quad + ((1 + t) \dot{\vec{Y}}(0), \dot{Y}_{d+1}(0))) \\ &= \dot{\alpha}(0) \cdot \dot{\beta}(0) g_{\text{cân}}(\vec{x}, \vec{x}) + (1 + t)^2 g_{\text{cân}}(\dot{\vec{X}}(0), \dot{\vec{Y}}(0)) \\ &\quad + \dot{X}_{d+1}(0) \cdot \dot{Y}_{d+1}(0) \\ &= (1 + t)^2 g_{\text{cân}}(\dot{\vec{X}}(0), \dot{\vec{Y}}(0)) + \dot{X}_{d+1}(0) \cdot \dot{Y}_{d+1}(0) + \dot{\alpha}(0) \cdot \dot{\beta}(0) \\ &= h(x, t) \left(((\dot{\vec{X}}(0), \dot{X}_{d+1}(0)), \dot{\alpha}(0)), ((\dot{\vec{Y}}(0), \dot{Y}_{d+1}(0)), \dot{\beta}(0)) \right) \\ &= h(x, t)(u, v). \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{C}^d \times I$ esta mergulhado isometricamente em \mathbb{R}^{d+1} , via a isometria φ . Agora, para cada $t \in I$ fixo, temos que a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_t : (\mathcal{C}^d, g(t)) &\hookrightarrow (\mathcal{C}_t^d = \varphi_t(\mathcal{C}^d), h) \\ (\vec{x}, x_{n+1}) &\mapsto f(t)(\vec{x}, x_{n+1}) = ((1 + t)\vec{x}, x_{n+1}) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo sobre sua imagem e satisfaz:

$$\begin{aligned} d\varphi_t(v, v_{d+1}) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi_t(\vec{x}(s), x_{d+1}(s)) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (f(t)\vec{x}(s), x_{d+1}(s)) \\ &= (f(t).v, v_{d+1}). \end{aligned}$$

Logo, para cada $t \in I$ e cada $x \in \mathcal{C}^d$ consideramos a projeção ortogonal do espaço euclidiano \mathbb{R}^{d+1} ao espaço tangente $T_{\varphi_t(x)}(\mathcal{C}_t^d)$ como sendo;

$$V(y)(\omega) = (\vec{\omega}, \omega_{d+1}) - \frac{g_{\text{cân}}((\vec{\omega}, \omega_{d+1}), (\vec{y}, y_{d+1}))}{g_{\text{cân}}((\vec{y}, y_{d+1}), (\vec{y}, y_{d+1}))} \cdot (\vec{y}, y_{d+1})$$

para cada $\omega = (\vec{\omega}, \omega_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Logo, para cada $t \in I$ fixo, definimos os campos de vetores $X(t)(x)$ no espaço tangente $T_x(\mathcal{C}^d, g(t))$ da seguinte forma:

$$X(t)(x) := (d\varphi_t)^{-1}(V(x, t)).$$

Logo, para cada $\omega = (\vec{\omega}, \omega_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ temos

$$\begin{aligned} X(t)(x)(\omega) &= \frac{1}{f(t)} V(x, t)(\omega) \\ &= \left(\frac{1}{t+1} \vec{\omega}, \omega_{d+1} \right) - \frac{g_{\text{cân}}((\vec{\omega}, \omega_{d+1}), (\vec{x}, x_{d+1}))}{g_{\text{cân}}((\vec{x}, x_{d+1}), (\vec{x}, x_{d+1}))} \cdot \left(\frac{1}{t+1} \vec{x}, x_{d+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{t+1} \vec{\omega}, \omega_{d+1} \right) - \frac{g_{\text{cân}}(\vec{\omega}, \vec{x}) + \omega_{d+1} x_{d+1}}{g_{\text{cân}}(\vec{x}, \vec{x}) + x_{d+1}^2} \cdot \left(\frac{1}{t+1} \vec{x}, x_{d+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{t+1} \left(\vec{\omega} - \left(\frac{g_{\text{cân}}(\vec{\omega}, \vec{x}) + \omega_{d+1} x_{d+1}}{1 + x_{d+1}^2} \right) \cdot \vec{x} \right), \omega_{d+1} - x_{d+1} \right). \end{aligned}$$

Assim para $\{e_k\}$ uma base canônica de \mathbb{R}^{d+1} e cada $x \in \mathcal{C}^d$, a matriz do $X(t)(x)$ é dada por:

$$\begin{aligned} g(t)(x)(X(t)(e_\alpha), e_\beta) &= g(t)(x) \left(\left(\frac{1}{t+1} \left(\vec{e}_\alpha - \left(\frac{g_{\text{cân}}(\vec{e}_\alpha, \vec{x}) + (e_\alpha)_{d+1} x_{d+1}}{1 + x_{d+1}^2} \right) \cdot \vec{x} \right), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (e_\alpha)_{d+1} - x_{d+1} \right), \left(\vec{e}_\beta, (e_\beta)_{d+1} \right) \right) \\ &= (t+1) g_{\text{cân}} \left(\vec{e}_\alpha - \left(\frac{g_{\text{cân}}(\vec{e}_\alpha, \vec{x}) + (e_\alpha)_{d+1} x_{d+1}}{1 + x_{d+1}^2} \right) \cdot \vec{x}, \vec{e}_\beta \right) \\ &\quad + ((e_\alpha)_{d+1} - x_{d+1})(e_\beta)_{d+1} \\ &= (t+1) \left\{ g_{\text{cân}}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) - \left(\frac{g_{\text{cân}}(\vec{e}_\alpha, \vec{x}) + (e_\alpha)_{d+1} x_{d+1}}{1 + x_{d+1}^2} \right) g_{\text{cân}}(\vec{x}, \vec{e}_\beta) \right\} \\ &\quad + (e_\alpha)_{d+1}(e_\beta)_{d+1} - x_{d+1}(e_\beta)_{d+1} \\ &= (t+1) \left\{ \delta_{\alpha, \beta} - \frac{1}{1 + x_{d+1}^2} \left(g_{\text{cân}}(\vec{e}_\alpha, \vec{x}) g_{\text{cân}}(\vec{x}, \vec{e}_\beta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (e_\alpha)_{d+1} x_{d+1} g_{\text{cân}}(\vec{x}, \vec{e}_\beta) \right) \right\} + (e_\alpha)_{d+1}(e_\beta)_{d+1} - x_{d+1}(e_\beta)_{d+1} \\ &= (t+1) \delta_{\alpha, \beta} - \frac{t+1}{1 + x_{d+1}^2} \left(\vec{x}_\alpha \vec{x}_\beta + (e_\alpha)_{d+1} x_{d+1} \vec{x}_\beta \right) \\ &\quad + (e_\alpha)_{d+1}(e_\beta)_{d+1} - x_{d+1}(e_\beta)_{d+1}. \end{aligned}$$

Portanto, o $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(\mathcal{C}^d, g(t))$, é dado pela solução da equação

$$\begin{aligned} x_\alpha(t) &= x_\alpha(0) + \int_0^t \left((s+1) \delta_{\alpha, \beta} - \frac{s+1}{1 + x_{d+1}^2(s)} \left(\vec{x}_\alpha(s) \vec{x}_\beta(s) + (e_\alpha)_{d+1} x_{d+1}(s) \vec{x}_\beta(s) \right) \right. \\ &\quad \left. + (e_\alpha)_{d+1}(e_\beta)_{d+1} - x_{d+1}(s)(e_\beta)_{d+1} \right) \diamond dB^\beta(s), \end{aligned}$$

com $x_0 = \{x_\alpha(0); \alpha = 1, \dots, d+1\} \in (C^d, g(t))$.

3.3 Completitude estocástica do $g(t)$ -movimento Browniano

Nesta seção, consideramos a variedade diferenciável M compacta, conexa, de dimensão d e sem bordo $\partial M = \emptyset$. Tomamos a família de métricas riemannianas $\{g(t) : t \in I\}$ dependendo diferenciavelmente do tempo t , de modo que $(M, g(t))$ é geodesicamente completa para cada $t \in I$. Observamos que, o intervalo I pode ser tomado da forma $[0, T]$, $[0, \infty)$ ou \mathbb{R} . Logo, pelo Teorema 3.6 dado na primeira seção, a solução da seguinte equação diferencial estocástica:

$$\begin{cases} dx_t = \sum_{k=1}^m X_k(t)(x_t) \diamond dB_t^k, \\ x_0 = x \in M \end{cases} \quad (3.3.1)$$

é o $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$. Nesta seção, estudamos o tempo de explosão do $g(t)$ -movimento Browniano e damos condições geométricas para a não explosão do mesmo.

Consideramos a variedade produto $N = M \times I$ e munimos esta variedade com a métrica h dada por:

$$\begin{aligned} h(x, t) : T_{(x,t)}(M \times I) \times T_{(x,t)}(M \times I) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((X, a\partial_t), (Y, b\partial_t)) &\longmapsto g(t)(x)(X, Y) + abf(t)^2 \end{aligned}$$

onde $X, Y \in T(M)$ e $\partial_t \in T(I)$ e $f(t)$ é limitada e decrescente em t com $\int_0^\infty f^2 dt < \infty$. Pelo Teorema de Nash, a variedade N é mergulhada isometricamente no espaço euclidiano \mathbb{R}^m para m suficientemente grande. Consideramos a base ortonormal $\{e_1, \dots, e_m\}$ de \mathbb{R}^m e definimos os campos de vetores $\{V_1, \dots, V_m\}$ sobre N por:

$$V_k(x, t) = \pi_{(x,t)} e_k, \quad \forall k = 1, \dots, m \quad (3.3.2)$$

com $(x, t) \in M \times I$ e onde $\pi_{(x,t)} : \mathbb{R}^m \rightarrow T_{(x,t)}N$ é a projeção ortogonal.

Observação 3.8. *Vamos assumir que existe um mergulho isométrico de $(M \times I, h)$ sobre \mathbb{R}^m para m suficientemente grande tal que:*

- $(0, \dots, 0) \in M \times \{0\}$.
- Existem constantes positivas k_1, k_2 tal que

$$k_1 d_{M \times I}(p, q) \leq \|p - q\|_{\mathbb{R}^m} \leq k_2 d_{M \times I}(p, q),$$

para todo $p, q \in M \times I$.

Seja x_t o $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$ (Isto é, solução da equação (3.3.1)). Sobre (N, h) consideramos o processo

$$y_t = \begin{pmatrix} x_t \\ t \end{pmatrix}$$

com valor inicial $y = (x, 0)$. Este processo satisfaz a seguinte equação diferencial estocástica:

$$\begin{cases} dy_s = \partial_t(y_s)ds + \sum_{k=1}^m \widetilde{X}_k(y_s) \diamond dB_s^k, \\ y_0 = (x, 0) \in N, \end{cases}$$

onde os campos \widetilde{X}_i sobre N são dados por

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_k : M \times I &\rightarrow T_{(x,t)}M \times I \\ (x, t) &\mapsto \widetilde{X}_k(x, t) = X_k(t)(x) \end{aligned}$$

Lema 3.9. Para cada $\tilde{f} \in C^\infty(M \times I)$, consideramos a solução da equação:

$$d\tilde{f}(y_s) = \sum_{i=1}^m \widetilde{X}_i \tilde{f}(y_s) dB_s^i + \frac{1}{2} \Delta_{g(s)} \tilde{f}(y_s) ds + \partial_t \tilde{f}(y_s) ds.$$

Logo, se $p_1 : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ é dado por $p_1(x, t) = x$, então $p_1(y_s)$ é um $g(s)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$.

Demonstração. Utilizando a fórmula de transformação Itô-Stratonovich e o Teorema 3.6, temos que o processo y_t a valores em $N = M \times I$, é um processo de Markov com gerador $\mathcal{L}_t = \Delta_{g(t)} + \partial_t$. Agora, passaremos a mostrar a segunda parte do Lema. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $p_2 : M \times I \rightarrow \mathbb{R}$. Então para $y_s = (x_s, r_s)$ temos $p_1(y_s) = x_s$ e $p_2(y_s) = r_s$ com $r_0 = 0$ e $x_0 = x$. E assim

$$\begin{aligned} df(r_s) &= df(p_2(y_s)) \\ &= d(f \circ p_2)(y_s) \\ &= \partial_t(f \circ p_2)(y_s) ds \\ &= f'(r_s) ds \end{aligned}$$

de onde temos que $r_s = s$. Por outro lado, para cada $h \in C^\infty(M)$, temos

$$\begin{aligned} dh(x_s) &= d(h \circ p_1)(y_s) \\ &= \sum_{k=1}^m \widetilde{X}_k(h \circ p_1)(y_s) \diamond dB_s^k \\ &= \sum_{k=1}^m d(h \circ p_1) \widetilde{X}_k(y_s) \diamond dB_s^k \\ &= \sum_{k=1}^m d(h \circ p_1) X_k(s)(x_s) \diamond dB_s^k \\ &= \sum_{k=1}^m X_k(s) h(x_s) \diamond dB_s^k. \end{aligned}$$

□

Para cada ponto $(x, t) \in M \times I$, consideramos a base ortonormal $\{Z_1(x, t), \dots, Z_d(x, t)\} \cup \{\frac{1}{f(t)} \partial_t\}$ do espaço tangente $T_{(x,t)}(M \times I)$ com respeito à métrica riemanniana h dada por:

$$h(x, t)(X + a\partial_t, Y + b\partial_t) = g(t)(x)(X, Y) + abf(t)^2.$$

Então, qualquer campo de vetores Y sobre a variedade $N = M \times I$ pode ser escrito como:

$$Y(x, t) = \frac{a_0(x, t)}{f(t)} \partial_t + \sum_{i=1}^d a_i(x, t) Z_i(x, t) = Y_I + Y_M,$$

onde $Z_k(x, t) = \sum_{j=1}^d b_{kj}(x, t) \partial_j$ para alguma função diferenciável $b_{kj} \in C^\infty(M \times I)$.

Lema 3.10. *Sob a notação acima. Se $a_0(x, t) = f(t)$, então*

$$\operatorname{div}_N(Y) = \operatorname{div}_{g(t)}(Y_M) - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\partial_t g(t)).$$

Demonstração. Pela definição do divergente temos que:

$$\operatorname{div}_N Y(x, t) = \sum_{i=1}^d h(x, t) \left(\nabla_{Z_i}^N Y, Z_i \right) + h(x, t) \left(\nabla_{\frac{1}{f(t)} \partial_t}^N Y, \frac{1}{f(t)} \partial_t \right). \quad (3.3.3)$$

Começamos analisando o primeiro termo da equação (3.3.3):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d h(x, t) \left(\nabla_{Z_i}^N Y, Z_i \right) &= \sum_{i=1}^d h(x, t) \left(\nabla_{Z_i}^N \left(\frac{a_0(x, t)}{f(t)} \partial_t + Y_M \right), Z_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^d h(x, t) \left(\nabla_{Z_i}^N \left(\frac{a_0(x, t)}{f(t)} \partial_t \right), Z_i \right) \\ &\quad + h(x, t) \left(\nabla_{Z_i}^N (Y_M), Z_i \right). \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Observamos que, utilizando a seguinte fórmula dada em M.P. Do Carmo [4]:

$$h(\nabla_X Y, X) = \frac{1}{2} \{ Y h(X, X) - 2h([Y, X], X) \} \quad (3.3.5)$$

O primeiro termo da equação (3.3.4) é dado por:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d h(x, t) \left(\nabla_{Z_i}^N \left(\frac{a_0(x, t)}{f(t)} \partial_t \right), Z_i \right) &= \sum_{i=1}^d \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_0(x, t)}{f(t)} \partial_t h(x, t)(Z_i, Z_i) \right. \\ &\quad \left. - 2h(x, t) \left(\left[\frac{a_0(x, t)}{f(t)} \partial_t, Z_i \right], Z_i \right) \right\} \\ &= -h(x, t) \left(\frac{a_0(x, t)}{f(t)} \partial_t Z_i, Z_i \right) \\ &\quad - \frac{1}{f(t)} h(x, t) (Z_i(a_0(x, t)) \partial_t, Z_i). \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned} \left[\frac{a_0(x, t)}{f(t)} \partial_t, Z_i(x, t) \right] &= \frac{a_0(x, t)}{f(t)} \partial_t (Z_i(x, t)) - Z_i(x, t) \left(\frac{a_0(x, t)}{f(t)} \partial_t \right) \\ &= \frac{a_0(x, t)}{f(t)} \partial_t Z_i(x, t) - \sum_k b_{ik}(x, t) \partial_k \left(\frac{a_0(x, t)}{f(t)} \partial_t \right) \\ &= \frac{a_0(x, t)}{f(t)} \partial_t Z_i(x, t) - \sum_k b_{ik}(x, t) \partial_k (a_0(x, t)) \frac{\partial_t}{f(t)} \\ &= \frac{a_0(x, t)}{f(t)} \partial_t Z_i(x, t) - \frac{1}{f(t)} Z_i(a_0(x, t)) \partial_t. \end{aligned}$$

Portanto, o primeiro termo da equação (3.3.3) é dado por:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1} h(x, t) \left(\nabla_{Z_i}^N Y, Z_i \right) &= \sum_{i=1} \left\{ g(t)(x) \left(\nabla_{Z_i(t)}^{g(t)} Y_M, Z_i(t) \right) - \frac{a_0(t)(x)}{f(t)} g(t)(x) \left(\partial_t Z_i(t), Z_i(t) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{f(t)} g(t)(x) \left(Z_i(t) (a_0(t)) \partial_t, Z_i(t) \right) \right\} \\ &= \sum_{i=1} g(t)(x) \left(\nabla_{Z_i(t)}^{g(t)} Y_M, Z_i(t) \right) - \sum_{i=1} g(t)(x) \left(\partial_t Z_i(t), Z_i(t) \right). \end{aligned}$$

Por outro lado, o segundo termo da equação (3.3.3)

$$\begin{aligned} h(x, t) \left(\nabla_{\frac{1}{f(t)} \partial_t}^N Y, \frac{1}{f(t)} \partial_t \right) &= h(x, t) \left(\nabla_{\frac{1}{f(t)} \partial_t}^N \left(\frac{a_0(x, t)}{f(t)} \partial_t + Y_M \right), \frac{1}{f(t)} \partial_t \right) \\ &= \frac{1}{f(t)^2} \left\{ h(x, t) \left(\nabla_{\partial_t}^N \left(\frac{a_0(x, t)}{f(t)} \partial_t \right), \partial_t \right) \right. \\ &\quad \left. + h(x, t) \left(\nabla_{\partial_t}^N Y_M, \partial_t \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Aplicamos a fórmula dada em (3.3.5) aos dois termos desta equação, de onde temos que:

$$\begin{aligned} h(x, t) \left(\nabla_{\partial_t}^N \left(\frac{a_0(x, t)}{f(t)} \partial_t \right), \partial_t \right) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_0(x, t)}{f(t)} \partial_t h(x, t) (\partial_t, \partial_t) \right. \\ &\quad \left. - 2h(x, t) \left(\left[\frac{a_0(x, t)}{f(t)} \partial_t, \partial_t \right], \partial_t \right) \right\} \\ &= -h(x, t) \left(\frac{a_0(x, t)}{f(t)} \partial_t (\partial_t), \partial_t \left(\frac{a_0(x, t)}{f(t)} \partial_t \right), \partial_t \right) \\ &= -h(x, t) \left(- \left(\frac{\partial_t a_0(x, t) f(t) - a_0(x, t) \partial_t f(t)}{f(t)^2} \right) \partial_t, \partial_t \right) \\ &= \left(\frac{\partial_t a_0(x, t) f(t) - a_0(x, t) \partial_t f(t)}{f(t)^2} \right) h(x, t) (\partial_t, \partial_t) \\ &= \partial_t a_0(x, t) f(t) - a_0(x, t) \partial_t f(t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h(x, t) \left(\nabla_{\partial_t}^N Y_M, \partial_t \right) &= \frac{1}{2} \left\{ Y_M h(x, t) (\partial_t, \partial_t) - 2h(x, t) ([Y_M, \partial_t], \partial_t) \right\} \\ &= -h(x, t) \left(\sum_k a_k(x, t) Z_k(\partial_t) - \sum_k \partial_t (a_k(x, t) Z_k(x, t)), \partial_t \right) \\ &= -h(x, t) \left(- \sum_k \partial_t a_k(x, t) Z_k - \sum_k a_k(x, t) \partial_t Z_k, \partial_t \right) \\ &= \sum_k h(x, t) \left(\partial_t a_k(x, t) Z_k, \partial_t \right) + \sum_k h(x, t) \left(a_k(x, t) \partial_t Z_k, \partial_t \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, a equação (3.3.6) é dada por:

$$\begin{aligned} h(x, t) \left(\nabla_{\frac{1}{f(t)} \partial_t}^N Y, \frac{1}{f(t)} \partial_t \right) &= \frac{1}{f(t)^2} (\partial_t a_0(x, t) f(t) - a_0(x, t) \partial_t f(t)) \\ &= \partial_t \left(\frac{a_0(x, t)}{f(t)} \right). \end{aligned}$$

Portanto, para $a_0(x, t) = f(t)$ temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_N(Y) &= \sum_{i=1} g(t)(x) \left(\nabla_{Z_i(t)}^{g(t)} Y_M, Z_i(t) \right) - \sum_{i=1} g(t)(x) \left(\partial_t Z_i(t), Z_i(t) \right) + \partial_t \left(\frac{a_0(x, t)}{f(t)} \right) \\ &= \operatorname{div}_{g(t)}(Y_M) - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\partial_t g(t)). \end{aligned}$$

□

A variedade riemanniana $(M, g(t))$ é dita **Estocasticamente completa**, se para cada x com probabilidade 1 o $g(t)$ -movimento Browniano iniciando em x não explode. Isto é,

$$\mathbb{P}_x(\tau_e = \infty) = 1,$$

onde τ_e é o tempo de explosão do $g(t)$ -movimento Browniano. Observamos que o processo $y_t = (x_t, t)$ tem o mesmo tempo de explosão τ_e do $g(t)$ -movimento Browniano. Como o processo $y_t = (x_t, t)$ mora na variedade N , então aproveitamos a independência do tempo na variedade $(N = M \times I, h)$ e mostramos, seguindo ideias de K.D. Elworthy [6, Cap. 9], que o processo $y_t = (x_t, t)$ não explode.

Teorema 3.11. *Sejam x_t o $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$ e $y_t = (x_t, t)$ um processo em $(N = M \times I, h)$ que satisfaz a equação diferencial estocástica:*

$$\begin{cases} dy_s = \partial_t(y_s)ds + \sum_{k=1}^m \widetilde{X}_k(y_s) \diamond dB_s^k, \\ y_0 = (x, 0) \in N. \end{cases} \quad (3.3.7)$$

Assuma que

$$\sum_{i=1}^m \left| \operatorname{div}_N(V_i)(p) - \operatorname{div}_N(V_i)(q) \right| + |\operatorname{tr}(\partial_t g(p)) - \operatorname{tr}(\partial_t g(q))| \leq K r(d_N(p, q))$$

para todo $p, q \in N$ onde r é não decrescente e satisfaz $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r(k)}{k} = 0$. Então o $g(t)$ -movimento Browniano definido pelo Teorema 3.6 é completo.

Demonstração. Lembramos que se $\{e_1, \dots, e_m\}$ é a base ortonormal de \mathbb{R}^m e $\{V_1, \dots, V_m\}$ são os campos de vetores sobre $N = M \times I$ definidos por:

$$V_k(x, t) = \pi_{(x, t)} e_k, \quad \forall k = 1, \dots, m$$

com $(x, t) \in M \times I$ e onde $\pi_{(x, t)} : \mathbb{R}^m \rightarrow T_{(x, t)}N$ é a projeção ortogonal. Então temos que as funções altura h_i associadas a e_i se relacionam com os campos V_i da seguinte forma:

$$V_i(x, t) = \nabla^N h_i(x, t).$$

Logo, pelo Lema 3.10 temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_N(V_i)(x, t) &= \operatorname{div}_N(\nabla^N h_i(x, t)) \\ &= \operatorname{div}_{g(t)}(\nabla^{g(t)} h_i(t, \cdot)(x)) - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\partial_t g(t)) \\ &= \Delta_{g(t)} h_i(t, \cdot)(x) - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\partial_t g(t)). \end{aligned}$$

Alem disso, pela definição da métrica h em N , temos que:

$$\begin{aligned}\partial_t h_i &= h(x, t) \left(\partial_t, \nabla^N h_i \right) \\ &\leq \|\partial_t\| \\ &= \left(h(x, t) \left(\partial_t, \partial_t \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= f(t).\end{aligned}$$

Por outro lado, temos por hipótese que:

$$\sum_{i=1}^m \left| \operatorname{div}_N(V_i)(p) - \operatorname{div}_N(V_i)(q) \right| + |\operatorname{tr}(\partial_t g(p)) - \operatorname{tr}(\partial_t g(q))| \leq K r(d_N(p, q))$$

para todo $p, q \in N$ com r é não decrescente e satisfazendo $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r(k)}{k} = 0$. Assim, para $0 = (0, \dots, 0) \in N$ temos

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\partial_t g(p)) &\leq \operatorname{tr}(\partial_t g(0)) + K r(d_N(p, 0)) \\ &\leq K_0 + K r(d_N(p, 0)).\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_N(V_i)(p) &\leq \operatorname{div}_N(V_i)(0) + K r(d_N(p, 0)) \\ &\leq K_0 + K r(d_N(p, 0)).\end{aligned}$$

Definamos U_n os subconjunto de $M \times I$ dados por:

$$U_n = \left\{ (x, t) \in M \times I, d_{M \times I}((x, t), (0, \dots, 0)) < n \right\}$$

e $y_t = (x_t, t)$ o processo definido pela equação (3.3.7) acima tal que $y_0 = 0$. Denotemos por τ_n o primeiro tempo de saída do processo y_t de U_n . Se consideramos os subconjuntos $\Omega_t^n \subset \Omega$ definidos por:

$$\Omega_t^n = \{\omega : t < \tau_n(\omega)\}.$$

Agora, como $h_i : N \rightarrow \mathbb{R}$ então pela equação (3.3.7) temos que

$$dh_i^2(y_s) = 2h_i(y_s) \partial_t h_i(y_s) ds + \sum_{k=1}^m \widetilde{X}_k h_i^2(y_s) \diamond dB_s^k.$$

Logo, usando a notação integral para $s = t \wedge \tau_n$ e tomando esperança na equação anterior, observamos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h_i^2(y_{t \wedge \tau_n})] &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau_n} |h_i(y_s)| \left((2\partial_s + \Delta_{g(s)}) h_i(s, x_s) \right) + |\nabla^{M_s} h_i(y_s)|^2 ds \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau_n} \left(2|h_i(y_s)| |\partial_s h_i(s, x_s)| + |h_i(y_s)| \operatorname{div}_N(V_i)(s, x_s) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\partial_s g(s)) + 1 \right) ds \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau_n} \left(k_2 n f(s) + k_2 n \operatorname{div}_N(V_i)(s, x_s) + \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\partial_s g(s)) + 1 \right) ds \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau_n} \left(nK_1 + K_0 + nK r(d_N((x_s, s), 0)) + K_2 \right) ds \right] \\ &\leq \widetilde{K}(n(1 + r(n)) + 1)t.\end{aligned}\tag{3.3.8}$$

Onde temos utilizado que

$$|h(y)| \leq \|y - 0\|_{\mathbb{R}^m} \leq k_2 d_N(y, 0)$$

e

$$|\nabla^{M_s} h_i(y_s)|^2 \leq |\nabla^N h_i(y_s)|^2 \leq 1.$$

Portanto,

$$\mathbb{E}[\|y_{t \wedge \tau_n}\|_{\mathbb{R}^m}^2] \leq m \widetilde{K}(n(1 + r(n)) + 1)t.$$

Mas por outro lado, usando a desigualdade $k_1 d_N(y, 0) \leq \|y - 0\|_{\mathbb{R}^m}$ dada na Observação 3.8 temos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|y_{t \wedge \tau_n}\|_{\mathbb{R}^m}^2] &= \int_{\Omega} \|y_{t \wedge \tau_n}\|_{\mathbb{R}^m}^2 d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega_t^n} \|y_{t \wedge \tau_n}\|_{\mathbb{R}^m}^2 d\mathbb{P} + \int_{(\Omega_t^n)^C} \|y_{t \wedge \tau_n}\|_{\mathbb{R}^m}^2 d\mathbb{P} \\ &\geq \int_{(\Omega_t^n)^C} \|y_{t \wedge \tau_n}\|_{\mathbb{R}^m}^2 d\mathbb{P} \\ &\geq n^2 k_1 \mathbb{P}((\Omega_t^n)^C). \end{aligned}$$

Assim, disto e da desigualdade dada em (3.3.8), segue que

$$\mathbb{P}((\Omega_t^n)^C) \leq \widetilde{K}_1 \frac{(n(1 + r(n)) + 1)t}{n^2}.$$

Então,

$$\mathbb{P}(\Omega_t^n) \geq 1 - \widetilde{K}_1 \frac{(n(1 + r(n)) + 1)t}{n^2}.$$

Logo, temos que para todo t ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_n \Omega_t^n\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Omega_t^n) \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{P}\left(\bigcup_n \Omega_t^n\right) = 1$. Só resta mostrar que

$$\{\omega, \tau_e(\omega) = \infty\} = \{\omega \in \Omega, \omega \in \bigcup_n \Omega_t^n \text{ para todo } t\}.$$

Se $\omega \in \{\tau_e = \infty\}$ então temos que para todo t , $y_t(\omega) \in U_{n_0}$ para algum n_0 , então $\omega \in \Omega_t^{n_0}$. Por outro lado se $\omega \in \bigcup_n \Omega_t^n$ para todo t então $d_N(0, y_t(\omega)) < \infty$.

Portanto, o processo y_t é completo e assim, x_t é completo.

□

Corolário 3.12. *Sejam x_t o $g(t)$ -movimento Browniano como no Teorema anterior. Assuma que $\text{div}_N(V_i)$ e $\text{tr}(\partial_t g)$ são limitados, então o $g(t)$ -movimento Browniano definido pelo Teorema 3.6 é completo.*

Demonstração. No teorema anterior pegamos $r = cte$.

□

Capítulo 4

Análise geométrico diferencial para o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano

No capítulo anterior, estudamos a construção do $g(t)$ -movimento Browniano via mergulho isométrico e obtivemos condições para a não explosão do mesmo. Neste capítulo, nos baseamos nesta construção e adaptamos nossas idéias aos trabalhos de Elworthy [7] e Kunita [15]. Consideramos o fluxo solução $\{\xi_t : t \geq 0\}$ do $g(t)$ -movimento Browniano e sua derivada, que consiste das aplicações lineares $(\xi_t)_* = T_x \xi_t : T_x(M) \rightarrow T_{\xi_t(x)}(M)$. Consideramos campos de vetores $U(t)$ sobre a variedade riemanniana M , dados por

$$U(t) - U(0) = \int_0^t Y(s) \diamond dN_s,$$

onde $Y(s)$ é um campo de vetores e $\{N_t : t \geq 0\}$ é um semimartingale contínuo sobre a variedade. Mostramos que

$$(\xi_t)_* U_t - U_0 = \int_0^t (\xi_s)_* Y_s \diamond dN_s - \sum_{i=1}^m \int_0^t L_{X_i(s)}(\xi_s)_* U_s \diamond dB_s^i$$

com valor inicial U_0 ao longo do $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$, onde os campos $X_i(t)$ sobre $(M, g(t))$ são construídos no capítulo anterior via mergulho isométrico.

Consideramos 1-formas que dependem diferenciavelmente do tempo sobre a variedade dadas por:

$$\theta_t - \theta_0 = \int_0^t \alpha_s \diamond dN_s, \tag{4.0.1}$$

onde $\{N_t : t \geq 0\}$ é um semimartingale contínuo sobre a variedade.

Dada a fórmula de Weitzenböck $\square_{g(t)}^1 \theta = \Delta_{g(t)}^1 \theta - \text{Ric}(\cdot, \theta^\sharp)$ para o $g(t)$ -Laplaciano sobre 1-formas, baseados no trabalho de Kunita [15] e Elworthy [7], o objetivo neste capítulo será: Obter uma fórmula de Itô para fluxo solução $\{\xi_t : t \geq 0\}$ do $g(t)$ -movimento Browniano atuando sobre a 1-forma θ_t e caracterizar geometricamente esta fórmula em relação a fórmula de Weitzenböck.

Boas referências para este capítulo são os trabalhos de H. Kunita [15], E.P. Hsu [12], J. Jost [14], K.D. Elworthy [6,7,8] e R. Abraham, J.E. Marsden and T. Ratiu [2].

4.1 Fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano: Propriedades

Começamos esta seção tratando os fluxos Brownianos gradientes que constituem uma das primeiras classes de fluxos estocásticos não lineares, a ser estudados desde um ponto de vista da teoria Ergódica. Consideramos a seguinte equação diferencial estocástica

$$dx_t = \sum_{i=1}^m V_i(x_t) \diamond dB_t^i + A(x_t)dt, \quad (4.1.1)$$

sobre uma variedade M conexa de dimensão d . Assumiremos por conveniência que M , V e A são de classe C^∞ e $\{B_t = (B_t^1, \dots, B_t^m) : t \geq 0\}$ é o movimento Browniano sobre o espaço Euclidiano \mathbb{R}^m , para algum m não necessariamente igual a d . Então A é um campo de vetores sobre M e para cada $x \in M$ temos

$$\begin{aligned} V(y): \mathbb{R}^m &\rightarrow T_y(M) \\ e_i &\mapsto V(y)(e_i) = V_i(y) \end{aligned}$$

onde e_1, \dots, e_m é uma base canônica de \mathbb{R}^m . Então, o sistema (4.1.1) constitui um sistema dinâmico estocástico com gerador

$$\mathcal{A} = \Delta_M + A$$

tal que os processos solução são movimentos Brownianos sobre M , quando $A = 0$. Um **fluxo estocástico** $\{\xi_t : t \geq 0\}$ para a equação (4.1.1), será dado pela aplicação:

$$\xi_t : M \times \Omega \rightarrow M,$$

para cada $t \geq 0$ e tal que para cada $\omega \in \Omega$ a aplicação:

$$\xi(\cdot, \omega) : [0, \infty] \times M \rightarrow M$$

é contínua e tal que $\{\xi_t(y) : t \geq 0\}$ é a solução de (4.1.1) com $\xi_0(y) = y$ para cada $y \in M$.

Munimos a M de uma família de métricas $\{g(t) : t \in I\}$ que dependem diferenciavelmente do tempo, onde o intervalo I pode ser tomado da forma $[0, T]$, $[0, \infty)$ ou \mathbb{R} . Logo, consideramos a equação diferencial estocástica sobre a variedade $(M, g(t))$ dada por:

$$dx_t = \sum_{k=1}^m X_k(t)(x_t) \diamond dB_t^k, \quad (4.1.2)$$

onde os campos $X_k(t)$ sobre $(M, g(t))$, são dados pela equação (3.1.1) no Capítulo anterior. Logo, pelo Teorema 3.6 mostrado no Capítulo anterior, temos que $\Delta_{g(t)} = \sum_{k=1}^m X_k^2(t)$. Então, o sistema (4.1.2) constitui um sistema dinâmico estocástico com gerador

$$\mathcal{A}(t) = \Delta_{g(t)}$$

tal que os processos solução são $g(t)$ -movimentos Brownianos sobre $(M, g(t))$.

Lema 4.1. Para os campos $X_k(t)$ sobre $(M, g(t))$, temos

$$\sum_{k=1}^m \nabla_{X_k(t)}^{g(t)} X_k(t) = 0.$$

Demonstração. De fato, seja $f \in C^\infty(M)$ e pelo Corolário 3.7 no capítulo 2 temos

$$\Delta_{g(t)}f = \sum_{\alpha=1}^m \left(\nabla^{g(t)} \right)^2 f(X_\alpha(t), X_\alpha(t)).$$

Mas pelo Teorema 3.6 também no capítulo 2, temos

$$\Delta_{g(t)}f(x) = \sum_{k=1}^m X_k^2(t)f(x).$$

Portanto, igualando as duas equações

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m X_k^2(t)f &= \sum_{\alpha=1}^m \left(\nabla^{g(t)} \right)^2 f(X_\alpha(t), X_\alpha(t)) \\ &= \sum_{k=1}^m X_k(t)(X_k(t)f) - \sum_{k=1}^m \left(\nabla_{X_k(t)}^{g(t)} X_k(t) \right) f. \end{aligned}$$

□

Observação 4.2. Como $(M, g(t))$ é compacto para cada $t \in I$, um método para provar a existência do fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano é tomar qualquer mergulho diferenciável de M em algum \mathbb{R}^p e estender os campos $X_i(t)$ para obter uma equação diferencial estocástica no espaço euclidiano \mathbb{R}^p cujos coeficientes têm suporte compacto. O critério de Totoki-Kolmogorov para a existência de versões contínuas simples pode ser usado para obter um fluxo para a equação a valores em \mathbb{R}^p , ver Elworthy [6] e Kunita [15], sua restrição nos dará o fluxo solução requerido sobre a variedade M .

Ao longo deste trabalho vamos assumir que existe $\{\xi_t : t \geq 0\}$ o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano.

4.2 Fluxo do $g(t)$ -movimento Browniano atuando sobre campos de vetores dependendo do tempo

Nesta seção abordaremos nosso estudo para campos de vetores dependendo do tempo sobre a variedade. Seja $U(t)$ um campo de vetores sobre a variedade riemanniana M , dado por

$$U(t) - U(0) = \int_0^t Y(s) \diamond dN_s,$$

onde $\{N_t : t \geq 0\}$ é um semimartingale sobre a variedade e seja $\{\xi_t : t \geq 0\}$ o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano. Logo satisfaz a equação

$$d\xi_t = \sum_{i=1}^m X_i(t)(\xi_t) \diamond dB_t^i. \quad (4.2.1)$$

Como $(M, g(t))$ é compacta para cada $t \in [0, T]$, temos que o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano define um fluxo estocástico de difeomorfismos sobre $(M, g(t))$. Logo, o diferencial de $\{\xi_t : t \geq 0\}$ esta bem definido para todo $0 < t$ quasi certamente.

Denotemos por $((\xi_t)_*)_x = T_x(\xi_t)$ o diferencial da aplicação ξ_t que é por definição uma aplicação linear do espaço tangente $T_x(M)$ para o espaço tangente $T_{\xi_t(x)}(M)$ tal que:

$$((\xi_t)_*)_x X_x(f) = X_x(f \circ \xi_t), \quad \forall X_x \in T_x(M).$$

Logo, o campo de vetores $(\xi_t)_* X$ é dado por

$$((\xi_t)_* X)_x = ((\xi_t)_*)_{\xi_t^{-1}(x)} X_{\xi_t^{-1}(x)}.$$

Então se cumpre

$$(\xi_t)_* X f(x) = X(f \circ \xi_t)(\xi_t^{-1}(x)), \quad \forall x \in M. \quad (4.2.2)$$

para qualquer $f \in C^\infty(M)$. A derivada de Lie de um campo de vetores X com respeito a Y , é um campo de vetores $L_Y X$ definido por

$$\begin{aligned} L_Y X &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{((\xi_t)_* X)_x - X_x\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{((\xi_t)_*)_{\xi_t^{-1}(x)} X_{\xi_t^{-1}(x)} - X_x\} \end{aligned}$$

Este campo de vetores é também dado por:

$$L_Y X = [Y, X] = YX - XY$$

Teorema 4.3. *Sejam $\{\xi_t : t \geq 0\}$ o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano e $U(t)$ um campo de vetores dependentes do tempo sobre a variedade M , dado por:*

$$U(t) - U(0) = \int_0^t Y(s) \diamond dN_s,$$

onde $\{N_t : t \geq 0\}$ é um semimartingale contínuo e $Y(s)$ são campos de vetores sobre a variedade satisfazendo as condições do Teorema 2.7. Então

$$(\xi_t)_* U_t - U_0 = \int_0^t (\xi_s)_* Y_s \diamond dN_s - \sum_{i=1}^m \int_0^t L_{X_i(s)} (\xi_s)_* U_s \diamond dB_s^i.$$

Demonstração. Sejam $U(t)$ é um campo de vetores dependentes do tempo sobre a variedade M , dado por

$$dU(t) = Y(t) \diamond dN_s,$$

e $\{\xi_t : t \geq 0\}$ o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano. Então, tomando $F_t(x) = U(t)(x)$ e $M_t = \xi_t(x)$, aplicando a fórmula de Itô para funções compostas dada no Teorema 2.7 nos preliminares, temos

$$\begin{aligned} dU(t)(\xi_t(x)) &= (dF_t)(M_t) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial F_t}{\partial x_i}(M_t) \diamond dM_t^i \\ &= Y(t)(\xi_t(x)) \diamond dN_t + \sum_{k=1}^m U(t) X_k(t)(\xi_t(x)) \diamond dB_t^k. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Agora, seja $f \in C^\infty(M)$. Então

$$(\xi_t)_* U(t) f(x) = U(t)(f \circ \xi_t)(\xi_t^{-1}(x)).$$

De novo, definimos $F_t(x) = U(t)(f \circ \xi_t)(x)$ e $M_t = \xi_t^{-1}(x)$. Então, aplicando a fórmula de Itô para funções compostas, temos:

$$dU(t)(f \circ \xi_t)(M_t) = (dF_t)(M_t) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial F_t}{\partial x_i}(M_t) \diamond dM_t^i$$

Pela equação (4.2.3) obtemos

$$(dF_t)(x) = Y(t)(f \circ \xi_t)(x) \diamond dN_t + \sum_{k=1}^m U(t)(X_k(t)f \circ \xi_t)(x) \diamond dB_t^k.$$

Logo para $M_t = \xi_t^{-1}(x)$, temos

$$\begin{aligned} dF_t(M_t) &= Y(t)(f \circ \xi_t)(\xi_t^{-1}(x)) \diamond dN_t + \sum_{k=1}^m U(t)(X_k(t)f \circ \xi_t)(\xi_t^{-1}(x)) \diamond dB_t^k \\ &= (\xi_t)_* Y(t)f(x) \diamond dN_t + \sum_{k=1}^m (\xi_t)_* U(t)X_k(t)f(x) \diamond dB_t^k. \end{aligned}$$

Por outro lado, denotando a $\pi_i(\xi_{s,t}^{-1}(x)) = \xi_{s,t}^{-1i}(x)$ a projeção na i -ésima coordenada. Temos:

$$\begin{aligned} dM_t^i(x) &= d\pi_i(\xi_{s,t}^{-1}(x)) \\ &= - \sum_{k=1}^m X_k(t)\pi_i(\xi_t^{-1})(x) \diamond dB_t^k \\ &= - \sum_{k=1}^m X_k(t)(\pi_i \circ \xi_t^{-1})(\xi_t(\xi_t^{-1}(x))) \diamond dB_t^k \\ &= - \sum_{k=1}^m (\xi_t^{-1})_* X_k(t)\pi_i(\xi_t^{-1}(x)) \diamond dB_t^k \\ &= - \sum_{k=1}^m (d\pi_i)_{\xi_t^{-1}(x)}(\xi_t^{-1})_* X_k(t)(\xi_t^{-1}(x)) \diamond dB_t^k \\ &= - \sum_{k=1}^m \{(\xi_t^{-1})_* X_k(t)\}^i(\xi_t^{-1}(x)) \diamond dB_t^k, \end{aligned}$$

onde $\{(\xi_t^{-1})_* X_k(t)\}^i$ denota o i -ésimo coeficiente do campo $(\xi_t^{-1})_* X_k(t)$ no sistema coordenado (x_1, \dots, x_d) , isto é:

$$(\xi_t^{-1})_* X_k(t) = \sum_{j=1}^d \{(\xi_t^{-1})_* X_k(t)\}^j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} F_t(M_t) \diamond dM_t^i &= - \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} F_t(\xi_t^{-1}(x)) \cdot \{(\xi_t^{-1})_* X_k(t)\}^i(\xi_t^{-1}(x)) \diamond dB_t^k \\ &= - \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^d \{(\xi_t^{-1})_* X_k(t)\}^i \frac{\partial}{\partial x_i} F_t(\xi_t^{-1}(x)) \diamond dB_t^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \sum_{k=1}^m (\xi_t^{-1})_* X_k(t) F_t(\xi_t^{-1}(x)) \diamond dB_t^k \\
 &= - \sum_{k=1}^m X_k(t) (F_t \circ \xi_t^{-1})(\xi_t(\xi_t^{-1}(x))) \diamond dB_t^k \\
 &= - \sum_{k=1}^m X_k(t) (F_t \circ \xi_t^{-1})(x) \diamond dB_t^k \\
 &= - \sum_{k=1}^m X_k(t) U(t) (f \circ \xi_t)(\xi_t^{-1}(x)) \diamond dB_t^k \\
 &= - \sum_{k=1}^m X_k(t) (\xi_t)_* U(t) f(x) \diamond dB_t^k.
 \end{aligned}$$

Portanto, substituindo isto na fórmula de Itô para funções compostas dada no Teorema 2.7 nos preliminares, temos

$$\begin{aligned}
 d(\xi_t)_* U(t) f(x) &= dU(t) (f \circ \xi_t)(\xi_t^{-1}(x)) \\
 &= (dF_t)(M_t) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial F_t}{\partial x_i}(M_t) \circ dM_t^i \\
 &= (\xi_t)_* Y(t) f(x) \diamond dN_t + \sum_{k=1}^m (\xi_t)_* U(t) X_k(t) f(x) \diamond dB_t^k \\
 &\quad - \sum_{k=1}^m X_k(t) (\xi_t)_* U(t) f(x) \diamond dB_t^k \\
 &= (\xi_t)_* Y(t) f(x) \diamond dN_t \\
 &\quad + \sum_{k=1}^m \left\{ (\xi_t)_* U(t) \cdot X_k(t) - X_k(t) \cdot (\xi_t)_* U(t) \right\} f(x) \diamond dB_t^k \\
 &= (\xi_t)_* Y(t) f(x) \diamond dN_t - \sum_{k=1}^m [X_k(t), (\xi_t)_* U(t)] f(x) \diamond dB_t^k \\
 &= (\xi_t)_* Y(t) f(x) \diamond dN_t - \sum_{k=1}^m L_{X_k(t)}((\xi_t)_* U(t)) f(x) \diamond dB_t^k.
 \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

Corolário 4.4. *Em particular, se escrevemos $V_t = (\xi_t)_*(V)$ com $V \in T_x(M)$ temos que:*

$$V_t = V - \sum_{i=1}^m \int_0^t L_{X_i(s)}(V_s) \diamond dB_s^i. \quad (4.2.4)$$

De maneira análoga à prova do Teorema 4.3 temos para o fluxo inverso.

Teorema 4.5. *Nas condições do Teorema 4.3 e para $\{\xi_t^{-1} : t \geq 0\}$ o fluxo solução inverso do $g(t)$ -movimento Browniano. Temos*

$$(\xi_t^{-1})_* U_t - U_0 = \int_0^t (\xi_s^{-1})_* Y_s \diamond dN_s + \sum_{i=1}^m \int_0^t L_{X_i(s)}(\xi_s^{-1})_* U_s \diamond dB_s^i.$$

Utilizando a fórmula de transformação de Itô-Stratonovich, no Teorema 4.3, obtemos o seguinte Corolário.

Corolário 4.6. Nas condições do Teorema 4.3 e para o campo de vetores $U(t)$ dado por

$$U(t) - U(0) = \int_0^t Y(s) ds,$$

Temos que:

$$(\xi_t)_* U_t - U_0 = \int_0^t (\xi_s)_* Y_s ds - \sum_{i=1}^m \int_0^t L_{X_i(s)}(\xi_s)_* U_s dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^t L_{X_i(s)}^2(\xi_s)_* U_s ds.$$

4.3 Fluxo do $g(t)$ -movimento Browniano atuando sobre 1-formas dependendo do tempo

Na seção anterior, obtemos uma versão da fórmula de Itô para o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano atuando sobre campos de vetores dependendo do tempo. Nesta seção, vamos obter uma fórmula similar para o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano, mas atuando sobre 1-formas dependendo do tempo.

Seja $\{\xi_t : t \geq 0\}$ o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano. Denotemos por $((\xi_t)_*)_x = T_x(\xi_t)$ o diferencial do fluxo ξ_t que é por definição uma aplicação linear do espaço tangente $T_x(M)$ para o espaço tangente $T_{\xi_t(x)}(M)$ e por $(\xi_t^*)_x$ sua aplicação dual:

$$\begin{aligned} (\xi_t^*)_x : T_{\xi_t(x)}(M)^* &\leftrightarrow T_x(M)^* \\ \theta_{\xi_t(x)} &\mapsto (\xi_t^*)_x \theta_{\xi_t(x)} \end{aligned}$$

de modo que

$$(\xi_t^*)_x \theta_{\xi_t(x)}(X_x) = \theta_{\xi_t(x)}((\xi_t)_* X_x),$$

se cumpre para quaisquer $\theta_{\xi_t(x)} \in T_{\xi_t(x)}(M)^*$ e $X_x \in T_x(M)$. Assim, dada uma 1-forma θ , denotamos por $\xi_t^* \theta$ uma 1-forma tal que:

$$(\xi_t^* \theta)_x = (\xi_t^*)_x \theta_{\xi_t(x)}.$$

Então se cumpre que

$$(\xi_t^* \theta(X))(x) = (\theta((\xi_t)_* X))(\xi_t(x)).$$

Definição 4.7. Seja θ uma 1-forma, então a derivada de Lie para θ é dada por:

$$L_X \theta = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ \xi_t^* \theta - \theta \}$$

Sejam X e Y campos de vetores sobre M . Temos a seguinte relação para a derivada de Lie:

$$L_X \theta(Y) = X\theta(Y) - \theta(L_X Y) \quad (4.3.1)$$

Teorema 4.8. Seja θ_t uma 1-forma dependente do tempo sobre a variedade riemanniana $(M, g(t))$, dada por:

$$\theta_t - \theta_0 = \int_0^t \alpha_s \diamond dN_s,$$

onde $\{N_t : t \geq 0\}$ é um semimartingale sobre a variedade e seja $\{\xi_t : t \geq 0\}$ o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano. Então

$$(\xi_t)^* \theta_t - \theta_0 = \int_0^t (\xi_s)^* \alpha_s \diamond dN_s + \sum_{i=1}^m \int_0^t (\xi_s)^* L_{X_i(s)} \theta_s \diamond dB_s^i. \quad (4.3.2)$$

Demonstração. Seja θ_t uma 1-forma dependente do tempo sobre a variedade riemanniana $(M, g(t))$, dada por:

$$\theta_t - \theta_0 = \int_0^t \alpha_s \diamond dN_s, \quad (4.3.3)$$

onde $\{N_t : t \geq 0\}$ é um semimartingale sobre a variedade e seja $\{\xi_t : t \geq 0\}$ o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano. Observamos que provar a equação (4.3.2) é equivalente a mostrar que:

$$\xi_t^* \theta(t)(V)_x - \theta(0)(V)_x = \int_0^t (\xi_s)^* \alpha_s(V)_x \diamond dN_s + \sum_{i=1}^m \int_0^t (\xi_s)^* L_{X_i(s)} \theta_s(V)_x \diamond dB_s^i,$$

para cada $x \in M$ e $V \in T_x(M)$. Ou melhor, mostrar que

$$\begin{aligned} \theta(t)(\xi_t(x))((\xi_t)_* V)(\xi_t(x)) &= (\theta(0)(V))(x) + \int_0^t \alpha(s)(\xi_s(x))((\xi_s)_* V)(\xi_s(x)) \diamond dN_s \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \int_0^t (L_{X_i(s)} \theta(s))(\xi_s(x))((\xi_s)_* V)(\xi_s(x)) \diamond dB_s^i. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

De fato, sejam $x \in M$ e $V \in T_x(M)$. Aplicando a fórmula $\diamond(XY) = \diamond(X)Y + X \diamond(Y)$ para o processo $\theta(t)(\xi_t(x))((\xi_t)_* V)(\xi_t(x))$ temos:

$$\diamond(\theta(t)(\xi_t(x))((\xi_t)_* V)(\xi_t(x))) = \diamond(\theta(t)(\xi_t(x)))V_t(\xi_t(x)) + \theta(t)(\xi_t(x)) \diamond (V_t(\xi_t(x))) \quad (4.3.5)$$

onde pelo Corolário 4.4 temos que:

$$\diamond(V_t(\xi_t(x))) = - \sum_{i=1}^m L_{X_i(t)}(V_t) \diamond dB_t^i$$

Por outro lado, definimos $F_t(y) = \theta(t)(y)V_t(y)$ e $M_t = \xi_t(x)$ e aplicamos o Teorema 2.7 dados nos preliminares

$$d\theta(t)(\xi_t(x))(V_t)(\xi_t(x)) = (dF_t)(M_t) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial F_t}{\partial x_i}(M_t) \diamond dM_t^i$$

onde pelas equações (4.3.3) e (4.3.5) temos que o primeiro termo da equação anterior é dado por:

$$\begin{aligned} (dF_t)(M_t) &= \diamond(\theta(t)(\xi_t(x)))V_t(\xi_t(x)) + \theta(t)(\xi_t(x)) \diamond (V_t(\xi_t(x))) \\ &= \alpha(t)(\xi_t(x))V_t(\xi_t(x)) \diamond dN_t - \sum_{i=1}^m \theta(t)(\xi_t(x))(L_{X_i(t)}(V_t)) \diamond dB_t^i \end{aligned}$$

e pela mesma análise feito no Teorema 4.3 temos que o segundo termo é dado por

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \frac{\partial F_t}{\partial x_i}(M_t) \diamond dM_t^i &= \sum_{k=1}^m X_k(t)(F_t \circ \xi_t)(x) \diamond dB_t^k \\ &= \sum_{k=1}^m X_k(t)(\theta(t)(\xi_t(x))V_t(\xi_t(x))) \diamond dB_t^k. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} d\theta(t)(\xi_t(x))(V_t)(\xi_t(x)) &= \alpha(t)(\xi_t(x))V_t(\xi_t(x)) \diamond dN_t \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \theta(t)(\xi_t(x))(L_{X_i(t)}(V_t)) \diamond dB_t^i \\ &\quad + \sum_{k=1}^m X_k(t)(\theta(t)(\xi_t(x))V_t(\xi_t(x))) \diamond dB_t^k \\ &= \alpha(t)(\xi_t(x))V_t(\xi_t(x)) \diamond dN_t \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \left(X_k(t)(\theta(t)V_t) - \theta(t)(L_{X_i(t)}(V_t)) \right)(\xi_t(x)) \diamond dB_t^i \\ &= \alpha(t)(\xi_t(x))V_t(\xi_t(x)) \diamond dN_t \\ &\quad + \sum_{i=1}^m (L_{X_i(t)}\theta(t))(\xi_t(x))((\xi_t)_*V)(\xi_t(x)) \diamond dB_t^i. \end{aligned}$$

Logo, integrando de 0 a t e tendo presente que $\xi_0(x) = x$ e $V_0 = V$ obtemos a equação (4.3.4) como queríamos. \square

Em particular usando a fórmula de transformação de Itô-Stratonovich temos o seguinte Corolário.

Corolário 4.9. *Nas condições do Teorema 4.8 e para θ_t dado por:*

$$\theta(t) - \theta(0) = \int_0^t \alpha_s ds,$$

$$(\xi_t)^*\theta_t - \theta_0 = \int_0^t (\xi_s)^*\alpha_s ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t (\xi_s)^*L_{X_i(s)}\theta_s dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^t (\xi_s)^*L_{X_i(s)}^2\theta_s ds.$$

Gostaríamos de calcular as expressões geométricas para os termos $L_{X_i(s)}\theta_s$ e $L_{X_i(s)}^2\theta_s$ do Corolário (4.9).

Lema 4.10. *Para cada $V \in T_x(M)$ e com as notações de acima, temos que:*

$$L_{X_k(t)}\theta(t)(V) = \nabla_{X_k(t)}^{g(t)}\theta_t(V) + \theta_t\left(\nabla_V^{g(t)}X_k(t)\right) \quad (4.3.6)$$

e

$$\begin{aligned} L_{X_k(t)}^2\theta(t)(V) &= \nabla_{X_k(t)}^{g(t)}\left(\nabla_{X_k(t)}^{g(t)}\theta_t\right)(V) + 2\nabla_{X_k(t)}^{g(t)}\theta_t\left(\nabla_V^{g(t)}X_k(t)\right) \\ &\quad + \theta_t(R(V, X_k(t))X_k(t)) + \theta_t\left(\nabla_V^{g(t)}\left(\nabla_{X_k(t)}^{g(t)}X_k(t)\right)\right) \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Demonstração. Sejam $x \in M$ com $x = \xi_0(x_0)$ e $V \in T_x(M)$, como $L_{X_k(t)}\theta(t)$ é uma 1-forma sobre $(M, g(t))$ temos

$$\begin{aligned} L_{X_k(t)}\theta(t)(V) &= X_k(t)\theta_t(V) - \theta_t(L_{X_k(t)}V) \\ &= X_k(t)\theta_t(V) - \theta_t([X_k(t), V]) \\ &= X_k(t)\theta_t(V) - \theta_t(\nabla_{X_k(t)}^{g(t)}V) + \theta_t(\nabla_V^{g(t)}X_k(t)) \\ &= \nabla_{X_k(t)}^{g(t)}\theta_t(V) + \theta_t(\nabla_V^{g(t)}X_k(t)), \end{aligned}$$

onde a última igualdade provem da fórmula:

$$\nabla_Z\theta(Y) = Z\theta(Y) - \theta(\nabla_ZY).$$

Agora considerando a $L_{X_k(t)}\theta(t)$ como uma 1-forma na equação (4.3.6) temos:

$$\begin{aligned} L_{X_k(t)}^2\theta(t)(V) &= \nabla_{X_k(t)}^{g(t)}(L_{X_k(t)}\theta_t)(V) + (L_{X_k(t)}\theta_t)(\nabla_V^{g(t)}X_k(t)) \\ &= X_k(t)(L_{X_k(t)}\theta_t)(V) - L_{X_k(t)}\theta_t(\nabla_{X_k(t)}^{g(t)}V) + L_{X_k(t)}\theta_t(\nabla_V^{g(t)}X_k(t)) \\ &= X_k(t)(\nabla_{X_k(t)}^{g(t)}\theta_t(V) + \theta_t(\nabla_V^{g(t)}X_k(t))) + L_{X_k(t)}\theta_t([V, X_k(t)]) \\ &= X_k(t)(\nabla_{X_k(t)}^{g(t)}\theta_t)(V) + X_k(t)(\theta_t(\nabla_V^{g(t)}X_k(t))) \\ &\quad + \nabla_{X_k(t)}^{g(t)}\theta_t([V, X_k(t)]) + \theta_t(\nabla_{[V, X_k(t)]}^{g(t)}X_k(t)) \\ &= \nabla_{X_k(t)}^{g(t)}(\nabla_{X_k(t)}^{g(t)}\theta_t)(V) + \nabla_{X_k(t)}^{g(t)}\theta_t(\nabla_{X_k(t)}^{g(t)}V) \\ &\quad + \nabla_{X_k(t)}^{g(t)}\theta_t(\nabla_V^{g(t)}X_k(t)) + \theta_t(\nabla_{X_k(t)}^{g(t)}(\nabla_V^{g(t)}X_k(t))) \\ &\quad + \nabla_{X_k(t)}^{g(t)}\theta_t([V, X_k(t)]) + \theta_t(\nabla_{[V, X_k(t)]}^{g(t)}X_k(t)) \\ &= \nabla_{X_k(t)}^{g(t)}(\nabla_{X_k(t)}^{g(t)}\theta_t)(V) + \nabla_{X_k(t)}^{g(t)}\theta_t(\nabla_{X_k(t)}^{g(t)}V) \\ &\quad + \nabla_{X_k(t)}^{g(t)}\theta_t(\nabla_V^{g(t)}X_k(t)) + \nabla_{X_k(t)}^{g(t)}\theta_t([V, X_k(t)]) \\ &\quad + \theta_t(\nabla_{[V, X_k(t)]}^{g(t)}X_k(t) + \nabla_{X_k(t)}^{g(t)}(\nabla_V^{g(t)}X_k(t))) \\ &= \nabla_{X_k(t)}^{g(t)}(\nabla_{X_k(t)}^{g(t)}\theta_t)(V) + 2\nabla_{X_k(t)}^{g(t)}\theta_t(\nabla_V^{g(t)}X_k(t)) \\ &\quad + \theta_t(R(X_k(t), V)X_k(t)) + \theta_t(\nabla_V^{g(t)}(\nabla_{X_k(t)}^{g(t)}X_k(t))). \end{aligned}$$

□

Agora, pelo Corolário 4.9 para cada $V \in T_x(M)$ temos que

$$\begin{aligned} (\xi_t)^*\theta_t(V) - \theta_0(V) &= \int_0^t (\xi_s)^*\alpha_s(V)ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t (\xi_s)^*L_{X_i(s)}\theta_s(V)dB_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^t (\xi_s)^*L_{X_i(s)}^2\theta_s(V)ds \\ &= \int_0^t \alpha_s(\xi_s)_*(V)ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t L_{X_i(s)}\theta_s(\xi_s)_*(V)dB_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^t L_{X_i(s)}^2\theta_s(\xi_s)^*(V)ds. \end{aligned}$$

Se colocamos $V_t = (\xi_s)^*(V) \in T_{\xi_t(x)}(M, g(t))$ e utilizamos o Lema(4.10) temos

$$\begin{aligned}
 \theta_t(V_t) - \theta_0(V) &= \int_0^t \alpha_s(V_s) ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t L_{X_i(s)} \theta_s(V_s) dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^t L_{X_i(s)}^2 \theta_s(V_s) ds \\
 &= \int_0^t \alpha_s(V_s) ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t \left\{ \nabla_{X_k(s)}^{g(t)} \theta_s(V_s) + \theta_s(\nabla_{V_s}^{g(t)} X_k(s)) \right\} dB_s^i \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^t \nabla_{X_k(s)}^{g(t)} (\nabla_{X_k(s)}^{g(t)} \theta_s)(V_s) ds \\
 &\quad + \sum_{i=1}^m \int_0^t \nabla_{X_k(s)}^{g(t)} \theta_s(\nabla_{V_s}^{g(t)} X_k(s)) ds \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^t \theta_s(R(X_k(s), V_s) X_k(s)) ds \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^t \theta_s(\nabla_{V_s}^{g(t)} (\nabla_{X_k(s)}^{g(t)} X_k(s))) ds.
 \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Com tudo isto obtemos o seguinte Teorema

Teorema 4.11. *Sejam ξ_t o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano e $\theta(t)$ uma 1-forma dada por*

$$\theta_t - \theta_0 = \int_0^t \alpha_s ds.$$

Se $V_t = (\xi_t)_*(V)$ com $V \in T_x(M)$. Então,

$$\begin{aligned}
 \theta_t(V_t) - \theta_0(V) &= \int_0^t \alpha_s(V_s) ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t \left\{ \nabla_{X_k(s)}^{g(t)} \theta_s(V_s) + \theta_s(\nabla_{V_s}^{g(t)} X_k(s)) \right\} dB_s^i \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^t \left\{ \nabla_{X_k(s)}^{g(t)} (\nabla_{X_k(s)}^{g(t)} \theta_s)(V_s) + \theta_s(R(X_k(s), V_s) X_k(s)) \right\} ds \\
 &\quad + \sum_{i=1}^m \int_0^t \nabla_{X_k(s)}^{g(t)} \theta_s(\nabla_{V_s}^{g(t)} X_k(s)) ds.
 \end{aligned}$$

Demonstração. Pelo Lema 4.1 temos que $\sum_{i=1}^m \nabla_{X_i(t)(x)}^{g(t)} X_i(t) = 0$, assim

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m \theta_t(\nabla_{V_t}^{g(t)} (\nabla_{X_k(t)} X_k(t))) &= \theta_t \left\{ \sum_{i=1}^m \nabla_{V_t}^{g(t)} (\nabla_{X_k(t)} X_k(t)) \right\} \\
 &= \theta_t \left\{ \nabla_{V_t}^{g(t)} \left(\sum_{i=1}^m \nabla_{X_k(t)}^{g(t)} X_k(t) \right) \right\} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

4.4 Fórmula de Weitzenböck

Existem dois tipos de Laplacianos definidos sobre formas diferenciáveis: um deles é o Laplaciano covariante e o outro é o Laplaciano de Hodge-de Rham. Enquanto o primeiro é

naturalmente associado ao movimento Browniano o segundo é geometricamente mais usado pois ele comuta com a derivada exterior. Eles serão relacionados pela fórmula de Weitzenböck, para maiores detalhes sobre isto ver os livros de J. Jost [14] e E.P. Hsu [12].

Começaremos esta seção, fazendo um breve repasso da fórmula de Weitzenböck sobre uma variedade com métrica constante g , para logo ser adaptadas em nosso cenário. Por definição, sabemos que Δ_g é o traço do Hessiano $\nabla^2 f$, isto é,

$$\Delta_g f = \sum_{\alpha=1}^m \nabla^2 f(X_\alpha, X_\alpha),$$

para cada $f \in C^\infty(M)$, onde $\{X_i\}$ é qualquer base ortonormal de $T_x M$. O operador Laplaciano sobre funções pode ser estendido para campos de tensores pela mesma relação

$$\Delta_g^q \theta = \sum_{\alpha=1}^m \nabla^2 \theta(X_\alpha, X_\alpha).$$

Assim, se θ é um campo de tensores do tipo (p, q) sobre M , então $\nabla \theta$ é a derivada covariante de θ e é um campo de tensores do tipo $(p, q+1)$. Tomando a derivada covariante mais uma vez, obtemos $\nabla^2 \theta$ que é um campo de tensores do tipo $(p, q+2)$. Logo, Δ_g^q assim definido sobre formas diferenciáveis é chamado de **Laplaciano covariante**.

Apesar de que o Laplaciano covariante Δ_g^q é naturalmente associado ao movimento Browniano sobre uma variedade, ele não comuta com a derivada exterior. Geometricamente mais importante é o Laplaciano de Hodge-de Rham \square_g^q , que passaremos a definir. Para duas formas diferenciáveis α e β com suporte compacto, definimos seu produto interno por

$$(\alpha, \beta) = \int_M g(x)(\alpha^\sharp, \beta^\sharp) dx,$$

onde \sharp denota o isomorfismo musical para formas diferenciáveis. Seja δ o formal adjunto de d com respeito a este produto interno, isto é

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta).$$

Então o **Laplaciano de Hodge-de Rham** é definido por:

$$\square_g^q = -(d\delta + \delta d).$$

Logo, a diferença entre \square_g^q e Δ_g^q é dada pela fórmula de Weitzenböck, que enunciaremos a seguir:

Teorema 4.12. *{Fórmula de Weitzenböck}*

Sejam \square_g^q e Δ_g^q o Laplaciano de Hodge-de Rham e o Laplaciano covariante sobre a variedade Riemanniana (M, g) . Então,

$$\square_g^q = \Delta_g^q + R^q,$$

onde R^q é um tensor curvatura de Weitzenböck.

Demonstração. Para a prova ver Hsu [12]. □

A fórmula de Weitzenböck toma uma aparência mais simples no caso de 1-formas

Corolário 4.13. Se θ é uma 1-forma sobre a variedade, então

$$\square_g^1 \theta = \Delta_g^1 \theta - \text{Ric}_g \theta^\sharp,$$

onde θ^\sharp é um campo de vetores definido por:

$$g(x)(\theta^\sharp, V) = \theta(x)(V),$$

para cada $V \in T_x(M)$.

Demonstração. Para a prova ver Hsu [12]. □

Seja $\{\xi_t : t \geq 0\}$ o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$. Logo satisfaz a equação

$$d\xi_t = \sum_{i=1}^m X_i(t)(\xi_t) \diamond dB_t^i. \quad (4.4.1)$$

Pelo Corolário 3.7 no Capítulo 2, temos que:

$$\Delta_{g(t)} f = \sum_{\alpha=1}^m \left(\nabla^{g(t)} \right)^2 f(X_\alpha(t), X_\alpha(t))$$

para cada $f \in C^\infty(M)$. Logo, o operador Laplaciano sobre funções pode ser estendido para campos de tensores pela mesma relação

$$\Delta_{g(t)}^q \theta = \sum_{\alpha=1}^m \left(\nabla^{g(t)} \right)^2 \theta(X_\alpha(t), X_\alpha(t)).$$

Assim, utilizando a fórmula de Weitzenböck para 1-formas e adaptando as idéias do trabalho de Elworthy [7] no nosso contexto, obtemos o seguinte Teorema.

Teorema 4.14. Sejam ξ_t o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano e $\theta(t)$ uma 1-forma dada por

$$\theta_t - \theta_0 = \int_0^t \alpha_s ds.$$

Então para $V_t = (\xi_t)_*(V)$ com $V \in T_x(M)$ tem-se:

$$\begin{aligned} \theta_t(V_t) - \theta_0(V) &= \int_0^t \alpha_s(V_s) ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t \left\{ \nabla_{X_k(s)}^{g(s)} \theta_s(V_s) + \theta_s(\nabla_{V_s}^{g(s)} X_k(s)) \right\} dB_s^i \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \int_0^t \nabla_{X_k(s)}^{g(s)} \theta_s(\nabla_{V_s}^{g(s)} X_k(s)) ds + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^t \square_{g(s)}^1 \theta_s(V_s) ds, \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

onde $\square_{g(t)}^1$ o $g(t)$ -Laplaciano de Hodge-de Rham sobre 1-formas.

Demonstração. Dada $\theta(t)$ uma 1-forma sobre $(M, g(t))$ dada por:

$$\theta_t - \theta_0 = \int_0^t \alpha_s ds.$$

Definimos o campo de vetores $\theta^\sharp(t, x) \in T_{\xi_t(x)}(M, g(t))$ por

$$g(t, x)(\theta^\sharp(t), V) = \theta(t, x)(V),$$

para cada $V \in T_x(M)$. E lembrando que $\text{Ric}_{g(t)}(x) : T_{\xi_t(x)}(M, g(t)) \oplus T_{\xi_t(x)}(M, g(t)) \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por:

$$\text{Ric}_{g(t)}(x)(V_1(t), V_2(t)) = g(t, x)(R(\cdot, V_1(t))V_2(t), \cdot).$$

Então, para $V(t) = V(t, x) \in T_{\xi_t(x)}(M, g(t))$ e $\theta^\sharp(t) = \theta^\sharp(t, x) \in T_{\xi_t(x)}(M, g(t))$ definido acima temos

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{g(t)}(V(t), \theta^\sharp(t)) &= \sum_{k=1}^m g(t) \left(R(X_k(t), V(t)) \theta^\sharp(t), X_k(t) \right) \\ &= \sum_{k=1}^m R_{g(t)} \left(X_k(t), V(t), \theta^\sharp(t), X_k(t) \right) \\ &= \sum_{k=1}^m R_{g(t)} \left(\theta^\sharp(t), X_k(t), X_k(t), V(t) \right) \\ &= - \sum_{k=1}^m R_{g(t)} \left(\theta^\sharp(t), X_k(t), V(t), X_k(t) \right) \\ &= - \sum_{k=1}^m g(t) \left(\theta^\sharp(t), R(X_k(t), V(t)) X_k(t) \right) \\ &= - \sum_{k=1}^m \theta(t) (R(X_k(t), V(t)) X_k(t)). \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Logo, substituindo a equação (4.4.3) na fórmula de Weitzenböck para 1-formas dada no Corolário 4.13, temos que para cada $V(t) = V(t, x) \in T_{\xi_t(x)}(M, g(t))$ se cumpre:

$$\begin{aligned} \square_{g(t)}^1 \theta(t)(V(t)) &= \sum_{i=1}^m \left\{ \nabla_{X_k(t)}^{g(t)} \nabla_{X_k(t)}^{g(t)} \theta(t)(V(t)) - \text{Ric}_{g(t)}(V(t), \theta^\sharp(t)) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ \nabla_{X_k(t)}^{g(t)} \nabla_{X_k(t)}^{g(t)} \theta(t)(V(t)) + \theta(t)(R(X_k(t), V(t)) X_k(t)) \right\}. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Portanto, utilizando a equação (4.4.4) no Teorema 4.11, temos provado o Teorema. \square

Capítulo 5

Ação ξ_t^* em campos tensores dependendo do tempo e aplicações

Neste capítulo estamos interessados em estudar as propriedades geométricas e topológicas de fluxos estocásticos atuando sobre campos de tensores que dependem diferenciavelmente do tempo. Começamos apresentando a fórmula de Itô para fluxos estocásticos atuando sobre campos de tensores que dependem diferenciavelmente do tempo sobre uma variedade Riemanniana. Logo, munindo a variedade com uma família de métricas $\{g(t) : t \in I\}$ que dependem diferenciavelmente do tempo, onde o intervalo I pode ser tomado da forma $[0, T]$, $[0, \infty)$ ou \mathbb{R} . E considerando o fluxo solução ξ_t do $g(t)$ -movimento Browniano, calculamos a fórmula de Itô para ξ_t atuando sobre campos de tensores do tipo (p, q) dados por:

$$K(t) - K(0) = \int_0^t R(s) \diamond ds,$$

onde N_s^1, \dots, N_s^r são semimartingales contínuos e R_s^i são campos e tensores em M . Logo, restringindo nossa atenção para o caso do tensor métrico (Isto é, $K(t) = g(t)$ tensor do tipo $(0, 2)$), adaptamos as idéias do trabalho de K.D. Elworthy and S. Rosenberg [10] no nosso contexto e mostramos várias propriedades geométricas úteis para aplicações topológicas posteriores como a nulidade dos grupos de Homotopia sobre $(M, g(t))$. Boas referências para o desenvolvimento deste capítulo são os trabalhos de H. Kunita [15], K.D. Elworthy [6,7,8], K.D. Elworthy and S. Rosenberg [10], K.D. Elworthy, and M. Yor [11], K.D. Elworthy, Y. Le Jan, and Xue-Mei Li [9], X.-M. Li [17] e R. Abraham, J.E. Marsden and T. Ratiu [2].

5.1 Fórmula de Itô para fluxos atuando sobre campos de tensores dependendo do tempo

Um campo de tensores K do tipo (p, q) sobre M é uma seção do fibrado vetorial $T_q^p(M)$ e é por definição uma aplicação:

$$\begin{aligned} K : M &\longrightarrow T_q^p(M) \\ x &\mapsto K(x) \in T_q^p(x) \end{aligned}$$

onde

$$T_q^p(x) = T_x(M) \otimes \dots \otimes T_x(M) \otimes T_x(M)^* \otimes \dots \otimes T_x(M)^*$$

tais que $T_x(M)$ é dado p -vezes e $T_x(M)^*$ é dado q -vezes. Em coordenadas locais $\{x_1, \dots, x_d\}$ com $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ e seja $\{X^i\}$ a base dual de T_x^*M . Então, um campo de tensores do tipo (p, q) pode ser escrito em coordenadas locais como sendo:

$$K(x) = K_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x) X_{i_1} \otimes \dots \otimes X_{i_p} \otimes X^{j_1} \otimes \dots \otimes X^{j_q}.$$

Logo, dadas as 1-formas $\theta^1, \dots, \theta^p$ e os campos de vetores Y_1, \dots, Y_q , temos que

$$K(x)(\theta^1 \otimes \dots \otimes \theta^p \otimes Y_1 \otimes \dots \otimes Y_q)$$

é um campo escalar. Em adiante, assumiremos que este é uma função de classe C^2 .

Seja K_t um tensor do tipo (p, q) dependendo do tempo definido na variedade M dado por:

$$K(t) - K(0) = \sum_{i=1}^r \int_0^t R(s)^i \diamond dN_s^i,$$

onde N_s^1, \dots, N_s^r são semimartingales contínuos e R_s^i são campos e tensores em M satisfazendo as condições do Teorema 2.7.

Seja $\{\varphi_t : t \geq 0\}$ o fluxo solução do sistema dinâmico estocástico sobre M , dado por:

$$dy_t = \sum_{i=1}^n Y_i(t)(y_t) \diamond dZ_t^i, \quad (5.1.1)$$

onde $Y_i(t)$ são campos que dependem diferenciavelmente do tempo sobre a variedade M e Z_t^i são semimartingales contínuos. O objetivo nesta seção é obter uma equação diferencial estocástica para $(\varphi_t)^* K_t$.

Dado campo de tensores $K(t)$ sobre a variedade M do tipo (p, q) , sabemos que o campo de tensores $\varphi_t^* K$ é dado pela relação:

$$\begin{aligned} (\varphi_t^* K(t))(x)(\theta^1 \otimes \dots \otimes \theta^p \otimes Y^1 \otimes \dots \otimes Y^q) \\ = K(t)(\varphi_t(x))((\varphi_t^*)^{-1} \theta^1 \otimes \dots \otimes (\varphi_t^*)^{-1} \theta^p \otimes (\varphi_t)_* Y_1 \otimes \dots \otimes (\varphi_t)_* Y_q). \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Logo, a derivada de Lie para o campo de tensores $K(t)$ com respeito a um campo X satisfaz;

$$\begin{aligned} (L_X K(t))(x)(\theta^1 \otimes \dots \otimes \theta^p \otimes Y_1 \otimes \dots \otimes Y_q) \\ = X(K(t)(x)(\theta^1 \otimes \dots \otimes \theta^p \otimes Y^1 \otimes \dots \otimes Y^q)) \\ - \sum_{k=1}^p K(t)(x)(\theta^1 \otimes \dots \otimes L_X \theta^k \otimes \dots \otimes \theta^p \otimes Y^1 \otimes \dots \otimes Y^q) \\ - \sum_{l=1}^q K(t)(x)(\theta^1 \otimes \dots \otimes \theta^p \otimes Y^1 \otimes \dots \otimes L_X Y_l \otimes \dots \otimes Y^q). \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Por meio desta identidade, podemos calcular a fórmula de Itô para $(\varphi_t)^*$ atuando sobre o campo de tensores $K(t)$.

Teorema 5.1. *Seja $K(t)$ um campo de tensores do tipo (p, q) dependendo do tempo, sobre a variedade Riemanniana M satisfazendo*

$$K(t) - K(0) = \sum_{k=1}^r \int_0^t R(s)^k \diamond dN_s^k, \quad (5.1.4)$$

onde N_s^1, \dots, N_s^r são semimartingales contínuos, R_s^k são campos de tensores em M satisfazendo as condições do Teorema 2.7 e $\{\varphi_t : t \geq 0\}$ é o fluxo solução do sistema dinâmico estocástico (5.1.1). Então

$$(\varphi_t)^* K_t - K_0 = \sum_{k=1}^r \int_0^t (\varphi_s)^* R_s^k \diamond dN_s^k + \sum_{k=1}^n \int_0^t (\varphi_s)^* (L_{Y_k(s)} K(s)) \diamond dZ_s^k. \quad (5.1.5)$$

Demonstração. Observamos que mostrar a equação (5.1.5) é equivalente a mostrar que:

$$\begin{aligned} & \varphi_t^* K(t)(x)(\theta^1 \otimes \dots \otimes \theta^p \otimes Y_1 \otimes \dots \otimes Y_q) \\ &= K(0)(x)(\theta^1 \otimes \dots \otimes \theta^p \otimes Y_1 \otimes \dots \otimes Y_q) \\ &+ \sum_{k=1}^r \int_0^t (\varphi_s)^* R_s^k(x)(\theta^1 \otimes \dots \otimes \theta^p \otimes Y_1 \otimes \dots \otimes Y_q) \diamond dN_s^k \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_0^t (\varphi_s)^* (L_{Y_k(s)} K(s))(x)(\theta^1 \otimes \dots \otimes \theta^p \otimes Y_1 \otimes \dots \otimes Y_q) \diamond dZ_s^k, \end{aligned}$$

para cada $x \in M$ e $(\theta^1 \otimes \dots \otimes \theta^p \otimes Y_1 \otimes \dots \otimes Y_q) \in T_x(M)^* \otimes \dots \otimes T_x(M)^* \otimes T_x(M) \otimes \dots \otimes T_x(M)$. Ou melhor pela equação (5.1.2), mostraremos que

$$\begin{aligned} & K(t, \varphi_t(x))((\varphi_t^*)^{-1} \theta^1 \otimes \dots \otimes (\varphi_t^*)^{-1} \theta^p \otimes (\varphi_t)_* Y_1 \otimes \dots \otimes (\varphi_t)_* Y_q) \\ &= K(0, x)(\theta^1 \otimes \dots \otimes \theta^p \otimes Y_1 \otimes \dots \otimes Y_q) \\ &+ \sum_{k=1}^r \int_0^t R^k(s)(\varphi_s^*(x))((\varphi_s^*)^{-1} \theta^1 \otimes \dots \otimes (\varphi_s^*)^{-1} \theta^p \\ &\otimes (\varphi_s)_* Y_1 \otimes \dots \otimes (\varphi_s)_* Y_q) \diamond dN_s^k \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_0^t (L_{Y_k(s)} K)(s)(\varphi_s^*(x))((\varphi_s^*)^{-1} \theta^1 \otimes \dots \otimes (\varphi_s^*)^{-1} \theta^p \\ &\otimes (\varphi_s)_* Y_1 \otimes \dots \otimes (\varphi_s)_* Y_q) \diamond dZ_s^k. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

De fato, sejam $x \in M$ e $(\theta^1 \otimes \dots \otimes \theta^p \otimes Y_1 \otimes \dots \otimes Y_q) \in T_x(M)^* \otimes \dots \otimes T_x(M)^* \otimes T_x(M) \otimes \dots \otimes T_x(M)$. Denotemos por:

$$K_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(t) = K_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(t, \varphi_t(x))$$

e por:

$$\begin{aligned} V_{j_1 \dots j_q, r_1 \dots r_q}^{i_1 \dots i_p, l_1 \dots l_p}(t) &= (Y_{i_1} \otimes \dots \otimes Y_{i_p} \otimes \theta^{j_1} \otimes \dots \otimes \theta^{j_q})((\varphi_t^*)^{-1} \theta^{l_1} \otimes \dots \otimes (\varphi_t^*)^{-1} \theta^{l_p} \\ &\otimes (\varphi_t)_* Y_{r_1} \otimes \dots \otimes (\varphi_t)_* Y_{r_q}). \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula $\diamond(XY) = \diamond(X)Y + X \diamond(Y)$ para o processo dado por:

$$K_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(t) V_{j_1 \dots j_q, r_1 \dots r_q}^{i_1 \dots i_p, l_1 \dots l_p}(t) = K(t, \varphi_t(x))((\varphi_t^*)^{-1} \theta^1, \dots, (\varphi_t^*)^{-1} \theta^p, (\varphi_t)_* Y_1, \dots, (\varphi_t)_* Y_q)$$

obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
K_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(t) V_{j_1 \dots j_q, r_1 \dots r_q}^{i_1 \dots i_p, l_1 \dots l_p}(t) &= K_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(0) V_{j_1 \dots j_q, r_1 \dots r_q}^{i_1 \dots i_p, l_1 \dots l_p}(0) \\
&+ \int_0^t K_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(s) \diamond V_{j_1 \dots j_q, r_1 \dots r_q}^{i_1 \dots i_p, l_1 \dots l_p}(s) + \int_0^t \diamond K_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(s) V_{j_1 \dots j_q, r_1 \dots r_q}^{i_1 \dots i_p, l_1 \dots l_p}(s).
\end{aligned} \tag{5.1.7}$$

Observamos que, pelo Corolário 4.4 e pelo Teorema 4.8 o termo $\diamond V_{j_1 \dots j_q, r_1 \dots r_q}^{i_1 \dots i_p, l_1 \dots l_p}(t)$ vai ser soma de elementos a forma:

$$\begin{aligned}
(Y_{i_1} \otimes \dots \otimes Y_{i_p} \otimes \theta^{j_1} \otimes \dots \otimes \theta^{j_q}) &\left((\varphi_t^*)^{-1} \theta^{l_1} \otimes \dots \otimes (-L_{Y_k(t)}(\varphi_t^*)^{-1} \theta^{l_r}) \otimes \right. \\
&\left. \dots \otimes (\varphi_t^*)^{-1} \theta^{l_p} \otimes (\varphi_t)_* Y_{r_1} \otimes \dots \otimes (\varphi_t)_* Y_{r_q} \right)
\end{aligned}$$

e da forma

$$\begin{aligned}
(Y_{i_1} \otimes \dots \otimes Y_{i_p} \otimes \theta^{j_1} \otimes \dots \otimes \theta^{j_q}) &\left((\varphi_t^*)^{-1} \theta^{l_1} \otimes \dots \otimes (\varphi_t^*)^{-1} \theta^{l_p} \otimes (\varphi_t)_* Y_{r_1} \otimes \right. \\
&\left. \dots \otimes (-L_{Y_k(t)}(\varphi_t)_* Y_{l_s}) \otimes \dots \otimes (\varphi_t)_* Y_{r_q} \right).
\end{aligned}$$

Por outro lado, definimos $F_t(\varphi_t(x)) = K_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(t) V_{j_1 \dots j_q, r_1 \dots r_q}^{i_1 \dots i_p, l_1 \dots l_p}(t)$ e $M_t = \varphi_t(x)$ e aplicamos o Teorema 2.7, então

$$d\theta(t)(\xi_t(x))(V_t)(\xi_t(x)) = (dF_t)(M_t) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial F_t}{\partial x_i}(M_t) \diamond dM_t^i, \tag{5.1.8}$$

onde pelas equações (5.1.4) e (5.1.7) temos que o primeiro termo da equação anterior é dado por:

$$\begin{aligned}
&(dF_t)(M_t) \\
&= \diamond \left(K_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(t) V_{j_1 \dots j_q, r_1 \dots r_q}^{i_1 \dots i_p, l_1 \dots l_p}(t) + K_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(t) \diamond \left(V_{j_1 \dots j_q, r_1 \dots r_q}^{i_1 \dots i_p, l_1 \dots l_p}(t) \right) \right) \\
&= (R^k)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(t) V_{j_1 \dots j_q, r_1 \dots r_q}^{i_1 \dots i_p, l_1 \dots l_p}(t) \diamond dN_t^k \\
&\quad - K(t, \varphi_t(x)) \left((\varphi_t^*)^{-1} \theta^{l_1} \otimes \dots \otimes (-L_{Y_k(t)}(\varphi_t^*)^{-1} \theta^{l_r}) \otimes \dots \otimes (\varphi_t^*)^{-1} \theta^{l_p} \otimes (\varphi_t)_* Y_{r_1} \otimes \right. \\
&\quad \left. \dots \otimes (\varphi_t)_* Y_{r_q} \right) \diamond dZ_t^k \\
&\quad - K(t, \varphi_t(x)) \left((\varphi_t^*)^{-1} \theta^{l_1} \otimes \dots \otimes (\varphi_t^*)^{-1} \theta^{l_p} \otimes (\varphi_t)_* Y_{r_1} \otimes \dots \otimes (-L_{Y_k(t)}(\varphi_t)_* Y_{l_s}) \otimes \right. \\
&\quad \left. \dots \otimes (\varphi_t)_* Y_{r_q} \right) \diamond dZ_t^k
\end{aligned}$$

e pela mesma análise feito no Teorema 4.3 temos que o segundo termo é dado por

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^d \frac{\partial F_t}{\partial x_i}(M_t) \diamond dM_t^i &= \sum_{k=1}^n Y_k(t) (F_t \circ \varphi_t)(x) \diamond dZ_t^k \\
&= \sum_{k=1}^n Y_k(t) \left(K_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(t) V_{j_1 \dots j_q, r_1 \dots r_q}^{i_1 \dots i_p, l_1 \dots l_p}(t) \right) \diamond dZ_t^k \\
&= Y_k(t) \left(K(t, \varphi_t(x)) ((\varphi_t^*)^{-1} \theta^1, \dots, (\varphi_t^*)^{-1} \theta^p, (\varphi_t)_* Y_1, \dots, (\varphi_t)_* Y_q) \right) \diamond dZ_t^k.
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo estes termos na equação (5.1.8) e utilizando a fórmula da derivada de Lie para campos de tensores dada em (5.1.3), temos:

$$\begin{aligned} d\big(K(t, \varphi_t(x))((\varphi_t^*)^{-1}\theta^1, \dots, (\varphi_t^*)^{-1}\theta^p, (\varphi_t)_*Y_1, \dots, (\varphi_t)_*Y_q)\big) \\ = d\big(K_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(t) V_{j_1 \dots j_q, r_1 \dots r_q}^{i_1 \dots i_p, l_1 \dots l_p}(t)\big) \\ = (R^k)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(t) V_{j_1 \dots j_q, r_1 \dots r_q}^{i_1 \dots i_p, l_1 \dots l_p}(t) \diamond dN_t^k \\ + (L_{Y_k(t)}K)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(t) V_{j_1 \dots j_q, r_1 \dots r_q}^{i_1 \dots i_p, l_1 \dots l_p}(t) \diamond dZ_t^k, \end{aligned}$$

onde

$$(R^k)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(t) = (R^k)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(t, \varphi_t(x))$$

e

$$(L_{Y_k(t)}K)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(t) = (L_{Y_k(s)}K)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(t, \varphi_t(x)).$$

Logo, integrando de 0 a t e tendo presente que $\xi_0(x) = x$ obtemos a equação (5.1.6) como queríamos. \square

De forma análoga podemos mostrar o seguinte Corolário.

Corolário 5.2. *Sob as condições do Teorema 5.1 e para $K(t)$ campo de tensores sobre a variedade M dado por:*

$$K(t) - K(0) = \int_0^t R(s)ds,$$

Então

$$\begin{aligned} (\varphi_t)^*K(t) - K(0) &= \int_0^t (\varphi_s)^*R(s)ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t (\varphi_s)^*L_{Y_j(s)}K(s)dZ_s^j \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t (\varphi_s)^*L_{Y_i(s)}L_{Y_j(s)}K(s)d[Z_s^i, Z_s^j]. \end{aligned}$$

Demonstração. Na demonstração do Teorema (5.1) anterior, utilizamos a fórmula de transformação de Itô-Stratonovich para obter:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_0^t (\varphi_s)^*(L_{Y_j(s)}K(s)) \diamond Z_s^j &= \sum_{j=1}^n \int_0^t (\varphi_s)^*(L_{Y_j(s)}K(s))Z_s^j \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t (\varphi_s)^*(L_{Y_i(s)}L_{Y_j(s)}K(s))d[Z_s^i, Z_s^j]. \end{aligned}$$

\square

5.2 Ação de ξ_t^* sobre o tensor métrico $g(t)$

Seja $(M, g(t))$ variedade riemanniana munida de uma família de métricas $\{g(t) : t \in I\}$ que dependem diferenciavelmente do tempo, onde o intervalo I pode ser tomado da forma $[0, T]$,

$[0, \infty)$ e \mathbb{R} . Consideramos $\{\xi_t : t \geq 0\}$ o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$. Logo satisfaz a equação

$$d\xi_t = \sum_{i=1}^m X_i(t)(\xi_t) \diamond dB_t^i. \quad (5.2.1)$$

onde $X_k(t)$ são campos de vetores sobre $(M, g(t))$, dados no capítulo 2.

Lema 5.3. *Sejam $K(t)$ um tensor do tipo (p, q) dependendo do tempo sobre $(M, g(t))$ dado por:*

$$K(t) - K(0) = \int_0^t R(s)ds,$$

e $\{\xi_t : t \geq 0\}$ o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$. Então,

$$\begin{aligned} (\xi_t)^* K(t) - K(0) &= \int_0^t (\xi_s)^* R(s)ds + \sum_{k=1}^n \int_0^t (\xi_s)^* L_{X_k(s)} K(s) dB_s^k \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^t (\xi_s)^* L_{X_k(s)}^2 K(s)ds. \end{aligned}$$

5.2.1 Tensor métrico $g(t)$

Consideramos a métrica $\{g(t) : t \in I\}$ como um tensor do tipo $(0, 2)$. Então

Lema 5.4. *Seja ξ_t o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$. Se a métrica $g(t)$ satisfaz:*

$$g(t) - g(0) = \int_0^t \alpha(s)ds,$$

e $Y_i(t) = (\xi_t)_* Y_i$ para cada $Y_i \in T(M)$ com $i = 1, 2$. Então,

$$\begin{aligned} g(t)(x)(Y_1(t), Y_2(t)) - g(0)(x)(Y_1, Y_2) &= \int_0^t \alpha(s)(x)(Y_1(s), Y_2(s))ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \int_0^t L_{X_i(s)} g(s)(x)(Y_1(s), Y_2(s))dB_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^t L_{X_i(s)}^2 g(s)(Y_1(s), Y_2(s))ds, \end{aligned}$$

para cada $x \in M$ e cada $t \in I$.

Demonstração. Sejam Y_1 e Y_2 campos de vetores em $T(M)$, então pelo Corolário 5.3 temos que

$$\begin{aligned} (\xi_t)^* g(t)(x)(Y_1, Y_2) - g(0)(x)(Y_1, Y_2) &= \int_0^t (\xi_s)^* \alpha(s)(x)(Y_1, Y_2)ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \int_0^t (\xi_s)^* L_{X_i(s)} g(s)(x)(Y_1, Y_2)dB_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^t (\xi_s)^* L_{X_i(s)}^2 g(s)(x)(Y_1, Y_2)ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= + \int_0^t \alpha(s)(x)((\xi_s)_* Y_1, (\xi_s)_* Y_2) ds \\
 &\quad + \sum_{i=1}^m \int_0^t L_{X_i(s)} g(s)(x)((\xi_s)_* Y_1, (\xi_s)_* Y_2) dB_s^i \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^t L_{X_i(s)}^2 g(s)(x)((\xi_s)_* Y_1, (\xi_s)_* Y_2) ds,
 \end{aligned}$$

para cada $x \in M$ e cada $t \in I$. \square

Calcularemos as expressões geométricas para os termos $L_{X_i(s)} g(t)$ e $L_{X_i(s)}^2 g(t)$ dados no Lema 5.4. Primeiro faremos para o caso de uma métrica fixa g e depois generalizamos para a família de métricas $\{g(t) : t \in I\}$.

Lema 5.5. *Sejam Y_1, Y_2 e X campos de vetores sobre uma variedade (M, g) com métrica riemanniana g , temos que:*

$$L_X g(Y_1, Y_2) = g(\nabla_{Y_1} X, Y_2) + g(Y_1, \nabla_{Y_2} X)$$

e $L_X^2 g$ é dado por:

$$L_X(L_X g)(Y_1, Y_2) = -2R(X, Y_1, X, Y_2) + 2g(\nabla_{Y_1} X, \nabla_{Y_2} X) - (L_{\nabla_X X} g(Y_1, Y_2)).$$

Demonstração. Seja g uma métrica riemanniana sobre M , e sejam Y_1, Y_2 e X campos de vetores sobre M , se consideramos g como um tensor do tipo $(0, 2)$ então temos que:

$$\begin{aligned}
 L_X g(Y_1, Y_2) &= Xg(Y_1, Y_2) - g(L_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, L_X Y_2) \\
 &= g(\nabla_X Y_1, Y_2) + g(Y_1, \nabla_X Y_2) - g(\nabla_X Y_1 - \nabla_{Y_1} X, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2 - \nabla_{Y_2} X) \\
 &= g(\nabla_{Y_1} X, Y_2) + g(Y_1, \nabla_{Y_2} X)
 \end{aligned}$$

e considerando a $L_X g$ como um tensor do tipo $(0, 2)$ temos

$$\begin{aligned}
 L_X^2 g(Y_1, Y_2) &= X(L_X g)(Y_1, Y_2) - (L_X g)(L_X Y_1, Y_2) - (L_X g)(Y_1, L_X Y_2) \\
 &= Xg(\nabla_{Y_1} X, Y_2) + Xg(Y_1, \nabla_{Y_2} X) - g(\nabla_{[X, Y_1]} X, Y_2) \\
 &\quad - g([X, Y_1], \nabla_{Y_2} X) - g(\nabla_{Y_1} X, [X, Y_2]) - g(Y_1, \nabla_{[X, Y_2]} X) \\
 &= g(\nabla_X \nabla_{Y_1} X, Y_2) + g(\nabla_{Y_1} X, \nabla_X Y_2) + g(\nabla_X Y_1, \nabla_{Y_2} X) + g(Y_1, \nabla_X \nabla_{Y_2} X) \\
 &\quad - g(\nabla_{[X, Y_1]} X, Y_2) - g([X, Y_1], \nabla_{Y_2} X) - g(\nabla_{Y_1} X, [X, Y_2]) - g(Y_1, \nabla_{[X, Y_2]} X) \\
 &= g(\nabla_X \nabla_{Y_1} X - \nabla_{[X, Y_1]} X, Y_2) + g(Y_1, \nabla_X \nabla_{Y_2} X - \nabla_{[X, Y_2]} X) \\
 &\quad - g([X, Y_1], \nabla_{Y_2} X) - g(\nabla_{Y_1} X, [X, Y_2]) + g(\nabla_{Y_1} X, \nabla_X Y_2) + g(\nabla_X Y_1, \nabla_{Y_2} X) \\
 &= g(\nabla_{Y_1} \nabla_X X - R(X, Y_1)X, Y_2) + g(Y_1, \nabla_{Y_2} \nabla_X X - R(X, Y_2)X) \\
 &\quad + g(\nabla_{Y_1} X, \nabla_{Y_2} X) + g(\nabla_{Y_1} X, \nabla_{Y_2} X) \\
 &= 2g(\nabla_{Y_1} X, \nabla_{Y_2} X) - R_g(X, Y_1, X, Y_2) - R_g(Y_1, X, Y_2, X) \\
 &\quad + g(\nabla_{Y_1} \nabla_X X, Y_2) + g(Y_1, \nabla_{Y_2} \nabla_X X) \\
 &= 2g(\nabla_{Y_1} X, \nabla_{Y_2} X) - 2R_g(X, Y_1, X, Y_2) - (L_{\nabla_X X} g(Y_1, Y_2)).
 \end{aligned}$$

\square

Sejam $\{X_1, \dots, X_m\}$ os campos obtidos via o mergulho de Nash para a métrica g , então

$$\sum_{i=1}^m \nabla_{X_i} X_i = 0$$

utilizando isto no Lema 5.5 e a definição da curvatura temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (L_{X_i}^2 g)(Y_1, Y_2) &= - \sum_{i=1}^m R_g(X_i, Y_1, X_i, Y_2) + \sum_{i=1}^m g(\nabla_{Y_1} X_i, \nabla_{Y_2} X_i) \\ &= -\text{Ric}_g(Y_1, Y_2) + T(Y_1, Y_2), \end{aligned}$$

onde T é um tensor, definido por:

$$T_g(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^m g(\nabla_{Y_1} X_i, \nabla_{Y_2} X_i).$$

Observamos que $T(Y, Y) \geq 0$ para todo $Y \in T(M)$.

Teorema 5.6. *Sejam $\{\xi_t : t \geq 0\}$ o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano e $T_{g(t)}$ é um tensor sobre $(M, g(t))$, definido por:*

$$T_{g(t)}(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^m g(\nabla_{Y_1}^{g(t)} X_i(t), \nabla_{Y_2}^{g(t)} X_i(t)),$$

onde $\nabla^{g(t)}$ denota a conexão de Levi-Civita associada à métrica $g(t)$. Se a métrica $g(t)$ sobre M evolui segundo a equação:

$$\frac{d}{dt} g(t) = \text{Ric}_{g(t)} - T_{g(t)}.$$

Então

$$g(0) = \mathbb{E}[(\xi_t)^* g(t)].$$

Demonstração. Seja $\{\xi_t : t \geq 0\}$ o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$. Logo, satisfaz a equação diferencial estocástica dada por:

$$d\xi_t = \sum_{k=1}^m X_k(t)(\xi_t) \diamond dB_t^k. \quad (5.2.2)$$

Então, para $R(s) = \text{Ric}_{g(s)} - T_{g(s)}$ no Lema 5.3, temos que

$$\begin{aligned} (\xi_t)^* g(t) - g(0) &= \int_0^t (\xi_s)^* (\text{Ric}_{g(s)} - T_{g(s)}) ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t (\xi_s)^* L_{X_i(s)} g(s) dB_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^t (\xi_s)^* L_{X_i(s)}^2 g(s) ds \\ &= \int_0^t (\xi_s)^* (\text{Ric}_{g(s)} - T_{g(s)}) ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t (\xi_s)^* L_{X_i(s)} g(s) dB_s^i \\ &\quad + \int_0^t (\xi_s)^* (-\text{Ric}_{g(s)} + T_{g(s)}) ds \\ &= \sum_{i=1}^m \int_0^t (\xi_s)^* L_{X_i(s)} g(s) dB_s^i. \end{aligned}$$

Tomando esperança a ambos lados da equação anterior obtemos $g(0) = \mathbb{E}[(\xi_t)^* g(t)]$, como queríamos. \square

Observação 5.7. Como consequência disto observamos que dado um campo de vetores $V \in T(M)$, temos que a norma de $(\xi_t)_*$ continua, em média, a mesma para a métrica $g(t)$. Portanto, ξ_t estabelece uma isometria em média entre $(M, g(0))$ e $(M, g(t))$.

Teorema 5.8. Seja ξ_t o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$. Se a métrica $g(t)$ satisfaz:

$$g(t) - g(0) = \int_0^t \alpha(s) ds$$

e $V_t = (\xi_t)_* V$ com $V \in T(M)$. Então,

$$\begin{aligned} g(t)(V_t, V_t) = & g(0)(V, V) + \int_0^t \alpha(s)(V_s, V_s) ds + 2 \sum_{i=1}^m \int_0^t g(s)(\nabla_{V_s}^{g(s)} X_i(s), V_s) dB_s^i \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^t \left\{ -\text{Ric}_{g(s)}(V_s, V_s) + T_{g(s)}(V_s, V_s) \right\} ds. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $V_t = (\xi_t)_*(V)$ com $V \in T(M)$, utilizando o Lema 5.4, o Lema 5.5 e o Lema 4.1 dado no capítulo 3, onde temos que: para os campos $X_k(t)$ sobre $(M, g(t))$ se cumpre:

$$\sum_{k=1}^m \nabla_{X_k(t)}^{g(t)} X_k(t) = 0.$$

Logo, temos o Teorema. □

Logo, adaptamos todo isto às idéias do trabalho de K.D. Elworthy, and S. Rosenberg [10], e assim no nosso contexto obtemos o seguinte Teorema.

Teorema 5.9. Seja ξ_t o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$. Se a métrica $g(t)$ satisfaz:

$$g(t) - g(0) = \int_0^t \alpha(s) ds$$

e $V_t = (\xi_t)_* V$ com $V \in T(M)$. Então,

$$\begin{aligned} d\|V_t\|_t^p = & p\|V_t\|_t^{p-1} \left(\sum_{i=1}^m g(t) \left(\nabla_{\frac{V_t}{\|V_t\|_t}}^{g(s)} X_i(t), \frac{V_t}{\|V_t\|_t} \right) \right) dB_t^i \\ & + \frac{p}{2} \|V_t\|_t^{p-2} \left(\alpha_t \left(\frac{V_t}{\|V_t\|_t}, \frac{V_t}{\|V_t\|_t} \right) - \text{Ric}_{g(t)} \left(\frac{V_t}{\|V_t\|_t}, \frac{V_t}{\|V_t\|_t} \right) \right. \\ & \left. + T_{g(t)} \left(\frac{V_t}{\|V_t\|_t}, \frac{V_t}{\|V_t\|_t} \right) + (p-2) g(t) \left(\nabla_{\frac{V_t}{\|V_t\|_t}}^{g(s)} X_i(t), \frac{V_t}{\|V_t\|_t} \right)^2 \right) dt. \end{aligned}$$

onde $\|\cdot\|_t$ denota a norma correspondente à métrica $g(t)$.

Demonstração. Sejam $\{\xi_t : t \geq 0\}$ o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$ e $V_t = (\xi_t)_* V$ com $V \in T(M)$. Consideramos o processo X_t dado por:

$$X_t = (\xi_t)^* g(t)(V, V) = g(t)(V_t, V_t) = \|V_t\|_t^2,$$

onde $\|\cdot\|_t$ é a norma correspondente à métrica $g(t)$. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, então aplicando a fórmula de Itô para $f(X_t)$ obtemos:

$$f(X_t) - f(X_0) = (\partial_x f)(X_t) dX_t + \frac{1}{2} (\partial_x^2 f)(X_t) d[X_t, X_t]$$

e se escolhemos $f(x) = (\sqrt{x})^p$ na discussão de acima, temos que

$$d(\sqrt{X_t})^p = \frac{p}{2}(\sqrt{X_t})^{p-2}dX_t + \frac{p(p-2)}{8}(\sqrt{X_t})^{p-4}d[X_t, X_t].$$

Por tanto, pelo Teorema 5.8 temos

$$\begin{aligned} d\|V_t\|_t^p &= \frac{p}{2}\|V_t\|_t^{p-2}dX_t + \frac{p(p-2)}{8}\|V_t\|_t^{p-4}d[X_t, X_t] \\ &= \frac{p}{2}\|V_t\|_t^{p-2}\left(\alpha_t(V_t, V_t)dt + \sum_{i=1}^m L_{X_i(t)}g(t)(V_t, V_t)dB_t^i\right. \\ &\quad \left.+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m L_{X_i(t)}^2g(t)(V_t, V_t)dt\right) + \frac{p(p-2)}{8}\|V_t\|_t^{p-4}\left((L_{X_i(t)}g(t))(V_t, V_t)\right)^2dt \\ &= p\|V_t\|_t^{p-2}\sum_{i=1}^m g(t)(\nabla_{V_t}^{g(s)}X_i(t), V_t)dB_t^i + \frac{p}{2}\|V_t\|_t^{p-2}\alpha_t(V_t, V_t)dt \\ &\quad + \frac{p}{2}\|V_t\|_t^{p-2}T_{g(t)}(V_t, V_t)dt - \frac{p}{2}\|V_t\|_t^{p-2}\text{Ric}_{g(t)}(V_t, V_t)dt \\ &\quad + \frac{p(p-2)}{2}\sum_{i=1}^m\|V_t\|_t^{p-4}g(t)(\nabla_{V_t}^{g(s)}X_i(t), V_t)^2dt \\ &= p\|V_t\|_t^p\sum_{i=1}^m g(t)\left(\nabla_{\frac{V_t}{\|V_t\|_t}}^{g(s)}X_i(t), \frac{V_t}{\|V_t\|_t}\right)dB_t^i + \frac{p}{2}\|V_t\|_t^p\alpha_t\left(\frac{V_t}{\|V_t\|_t}, \frac{V_t}{\|V_t\|_t}\right)dt \\ &\quad - \frac{p}{2}\|V_t\|_t^p\text{Ric}_{g(t)}\left(\frac{V_t}{\|V_t\|_t}, \frac{V_t}{\|V_t\|_t}\right)dt + \frac{p}{2}\|V_t\|_t^pT_{g(t)}\left(\frac{V_t}{\|V_t\|_t}, \frac{V_t}{\|V_t\|_t}\right)dt \\ &\quad + \frac{p(p-2)}{2}\sum_{i=1}^m\|V_t\|_t^p g(t)\left(\nabla_{\frac{V_t}{\|V_t\|_t}}^{g(s)}X_i(t), \frac{V_t}{\|V_t\|_t}\right)^2dt \\ &= p\|V_t\|_t^p\left(\sum_{i=1}^m g(t)\left(\nabla_{\frac{V_t}{\|V_t\|_t}}^{g(s)}X_i(t), \frac{V_t}{\|V_t\|_t}\right)\right)dB_t^i \\ &\quad + \frac{p}{2}\|V_t\|_t^p\left(\alpha_t\left(\frac{V_t}{\|V_t\|_t}, \frac{V_t}{\|V_t\|_t}\right) - \text{Ric}_{g(t)}\left(\frac{V_t}{\|V_t\|_t}, \frac{V_t}{\|V_t\|_t}\right)\right. \\ &\quad \left.+ T_{g(t)}\left(\frac{V_t}{\|V_t\|_t}, \frac{V_t}{\|V_t\|_t}\right) + (p-2)g(t)\left(\nabla_{\frac{V_t}{\|V_t\|_t}}^{g(s)}X_i(t), \frac{V_t}{\|V_t\|_t}\right)^2\right)dt. \end{aligned}$$

□

Definamos

$$K_p(t)(U, U) = \alpha(t)(U, U) - \text{Ric}_{g(t)}(U, U) + T_{g(t)}(U, U) + (p-2)\sum_{i=1}^m(g(t)(\nabla_U^{g(s)}X_i(t), U))^2,$$

para cada $U \in T(M)$ assuma que existe uma função contínua $k_p(t)(x)$ dada por:

$$k_p(t)(x) = \sup \{pK_p(t)(U, U) : \|U\|_t = 1, t \in [0, \infty)\}.$$

Corolário 5.10. *Seja $\{\xi_t : t \geq 0\}$ o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$. Se a métrica $g(t)$ satisfaz:*

$$g(t) - g(0) = \int_0^t \alpha(s)ds$$

e $V_t = (\xi_t)_* V$ com $V \in T(M)$. Então,

$$\mathbb{E}[\|V_t\|_t^p] \leq \|V_0\|^p \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t k_p(s)(x_s) ds\right)\right],$$

para cada $p \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Sejam $\{\xi_t : t \geq 0\}$ o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$, $p \in \mathbb{R}$ e $V_t = (\xi_t)_* V$ com $V \in T(M)$. Denotemos por M_t ao processo dado por:

$$dM_t = \sum_{i=1}^m g(t) \left(\nabla_{\frac{V_t}{\|V_t\|_t}}^{g(s)} X_i(t), \frac{V_t}{\|V_t\|_t} \right) dB_t^i.$$

Logo, substituindo M_t na equação de $\|V_t\|_t^p$ no Teorema 5.8, temos

$$\frac{d\|V_t\|_t^p}{\|V_t\|_t^p} = p dM_t + \frac{p}{2} K_p(t) \left(\frac{V_t}{\|V_t\|_t}, \frac{V_t}{\|V_t\|_t} \right) dt.$$

De onde, sua solução é dada por:

$$\|V_t\|_t^p = \|V_0\|^p \exp \left(pM_t - \frac{1}{2} p^2 [M_t, M_t] + \int_0^t \frac{p}{2} K_p(s) \left(\frac{V_s}{\|V_s\|_s}, \frac{V_s}{\|V_s\|_s} \right) ds \right).$$

Agora, pela definição da função contínua $k_p(t)(x)$, segue que

$$\|V_t\|_t^p \leq \|V_0\|^p \exp \left(pM_t - \frac{1}{2} p^2 [M_t, M_t] + \frac{1}{2} \int_0^t k_p(s)(x_s) ds \right).$$

Consideramos o processo

$$\tilde{B}_t^i = B_t^i - \int_0^t g(s) \left(\nabla_{\frac{V_s}{\|V_s\|_s}}^{g(s)} X_i(s), \frac{V_s}{\|V_s\|_s} \right) ds.$$

O Teorema de Girsanov garante que o processo \tilde{B}_t é um movimento Browniano em relação à medida de probabilidade $\mathbb{Q} = \exp(pM_t - \frac{1}{2} p^2 [M_t, M_t]) \mathbb{P}$.

Mas como

$$\begin{aligned} dx_t &= \sum_{i=1}^m X_i(t)(x_t) \diamond dB_t^i \\ &= \sum_{i=1}^m X_i(t)(x_t) \diamond d\tilde{B}_t^i + p \sum_{i=1}^m X_i(t)(x_t) g(t) \left(\nabla_{\frac{V_t}{\|V_t\|_t}}^{g(s)} P_i(t), \frac{V_t}{\|V_t\|_t} \right) dt. \end{aligned}$$

Então, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(x_t)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(x_t)]$ para toda função $f \in C^\infty(M)$. Por tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\|V_t\|_t^p] &\leq \|V_0\|^p \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(\int_0^t \frac{1}{2} k_p(s)(x_s) ds \right) \right] \\ &= \|V_0\|^p \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\int_0^t \frac{1}{2} k_p(s)(x_s) ds \right) \right]. \end{aligned}$$

□

5.3 Estabilidade de fluxos estocásticos e aplicações

Por último, guiados pelo trabalho de K.D. Elworthy, and S. Rosenberg [10], mostramos que os grupos de Homotopia se anulam se o $g(t)$ -movimento browniano sobre $(M, g(t))$ é fortemente momento estável e satisfaz certas condições geométricas.

Para $p \in \mathbb{R}$ definimos p -ésimo momento expoente $\mu_{g(t)}(p)$ do $g(t)$ -movimento Browniano por:

$$\mu_{g(t)}(p) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \sup_{x \in M} \mathbb{E}[\|T_x \xi_t\|_t^p], \quad (5.3.1)$$

onde $T_x \xi_t$ é a derivada do fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano e $\|\cdot\|_t$ denota a norma correspondente à métrica $g(t)$.

Dizemos que nosso $g(t)$ -movimento Browniano é **fortemente momento estável** se $\mu_{g(t)}(1) < 0$ e **fortemente p -ésimo momento estável** se $\mu_{g(t)}(p) < 0$.

Lema 5.11. *Seja $\{\xi_t : t \geq 0\}$ o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano e λ menor ou igual do que o ínfimo de todos os autovalores de $\{\frac{1}{2}\Delta_{g(t)} - k_p(t)\}$ Então,*

$$\mu_{g(t)}(p) \leq -\lambda.$$

Demonstração. Pela fórmula de Feynman-Kac, temos que

$$u(x, t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\int_0^t k_p(s)(x_s)ds\right)\right],$$

resolve a seguinte equação

$$\partial_t u(x, t) = \frac{1}{2}\Delta_{g(t)}u(x, t) - k_p(t)u(x, t).$$

Seja λ menor ou igual do que o ínfimo de todos os autovalores de $\{\frac{1}{2}\Delta_{g(t)} - k_p(t)\}$. Como

$$\partial_t \ln(u(x, t)) = \frac{\frac{1}{2}\Delta_{g(t)}u(x, t) - k_p(t)u(x, t)}{u(x, t)} \leq \lambda,$$

temos que $u(x, t) \leq e^{\lambda t}$ de onde pelo Corolário 5.10 temos que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\|V_t\|_t^p] \leq e^{\lambda t}$. Logo,

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sup_x \log \mathbb{E}[\|V_t\|_t^p] \leq -\lambda.$$

□

Considerando a construção do $g(t)$ -movimento browniano, feita via o mergulho isométrico \mathcal{I} em \mathbb{R}^m . Nosso último resultado, obtemos (sobre a variedade $(M, g(t))$ e no nosso contexto) uma versão do Teorema 5A de K.D. Elworthy and S. Rosenberg [10], onde mostra-se a nulidade dos grupos de Homotopia de uma variedade imersa no espaço Euclidiano em função da sua segunda forma fundamental.

Teorema 5.12. *Sejam $\{\xi_t : t \geq 0\}$ o fluxo solução do $g(t)$ -movimento Browniano, $H(t)$ e $S(t)$ a segunda forma fundamental e sua aplicação linear adjunta associada sobre $\mathcal{I}_t(M) = \mathcal{I}(M, t)$, respectivamente (onde, \mathcal{I} é o mergulho isométrico de $M \times I$). Suponha que:*

$\Delta_{g(t)} - \alpha(t)(U, U) + \text{Ric}_{g(t)}(U, U) + \sup \{\|S(t)(U)\|_t^2 + \|H(t)(U)\|_t^2 : \|U\|_t = 1, t \in [0, \infty)\} > 0$,
onde a métrica Riemanniana $g(t)$ sobre variedade $(M, g(t))$ satisfaz a equação:

$$g(t) - g(0) = \int_0^t \alpha(s) ds.$$

Então $\pi_1(M) = 0$ e $\pi_2(M) = 0$.

Demonstração. Definamos $N_i(x, t) = e_1 - X_i(t)(x)$, claramente temos que $N_i \perp T_p M_t$ para todo $p \in M_t = \mathcal{I}_t(M)$. Então, a segunda forma fundamental $H_{N_i}(t)$ de M_t é dada por

$$\begin{aligned} h(x, t)(\nabla_V^{M_t} X_i, V) &= g(t)(x)(\nabla_V^{g(t)} X_i, V) \\ &= g_{\text{cân}}(dX_i(V), V) \\ &= -g_{\text{cân}}(dN_i(V), V) \\ &= g_{\text{cân}}(N_i(V), dV(V)) \\ &= H_{N_i}(t)(V, V), \end{aligned}$$

para cada $V \in T(M_t)$. Por tanto,

$$\sum_{i=1}^m g(t)(x)(\nabla_V^{g(t)} X_i, V)^2 = \sum_{i=1}^m |H_{N_i}(t)|^2 = \|H(t)(V)\|^2.$$

Analogamente, sua aplicação linear adjunta associada $S_{N_i}(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} g(t)(x)(\nabla_V^{g(t)} X_i, \nabla_V^{g(t)} X_i) &= \sum_{j=1}^m g(t)(x)(\nabla_V^{g(t)} X_i, X_j)^2 \\ &= \sum_{j=1}^m g_{\text{cân}}(dN_i(V), X_j)^2 \\ &= g_{\text{cân}}(N_i, dX_j(V)) \\ &= g(t)(x)(S_{N_j}(t)(V), X_j)^2. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^m g(t)(x)(\nabla_V^{g(t)} X_i, \nabla_V^{g(t)} X_i)^2 = \sum_{i,j=1}^m g(t)(x)(S_{N_j}(t)(V), X_j)^2 = \|S(t)(V)\|_t^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} K_p(t)(U, U) - \alpha(t)(U, U) \\ &= -\text{Ric}_{g(t)}(U, U) + T_{g(t)}(U, U) + (p-2) \sum_{i=1}^m (g(t)(\nabla_U^{g(t)} X_i(t), U))^2 \\ &\leq -\text{Ric}_{g(t)}(U, U) + \sup \{\|S(t)(U)\|_t^2 + \|H(t)(U)\|_t^2 : \|U\|_t = 1, t \in [0, \infty)\}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 5.11, temos:

$$0 < \frac{1}{2} \Delta_{g(t)} - k_p(t) \leq -\mu_{g(t)}(p).$$

Logo, o Teorema segue imediatamente do **Corolário 1B.1** de K.D. Elworthy and S. Rosenberg [10]. \square

Referências Bibliográficas

- [1] M. Arnaudon, K.A. Coulibaly, and A. Thalmaier. *Brownian motion with respect to a metric depending on time: definition, existence and applications to Ricci flow*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 346(13-14):773–778, 2008.
- [2] R. Abraham, J.E. Marsden and T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1983.
- [3] A.K. Coulibaly. *Brownian motion with respect to time-changing Riemannian metrics, applications to Ricci flow*, Preprint <http://arxiv.org/abs/0901.1999v1>.
- [4] M.P. Do Carmo, *Geometria Riemanniana*, IMPA, terceira edição, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [5] K.D. Elworthy, *Geometric aspects of difusions on manifolds*, In: P.L. Hennequin, ed., *Ecole d'Été Probabilités de Saint-Flour XV - XVII* 1985, 1987, Lecture Notes in Mathematics, v. 1362, Berlin, Springer-Verlag, 1988, pp. 276-425.
- [6] K.D. Elworthy, *Stochastic Differential Equations on manifolds*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, vol. 70, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [7] K.D. Elworthy, *Stochastic Flows on Riemannian manifolds*, In M. Pinsky and V. Wihstutz, eds., *Stochastic Flows*, Birkhauser Progress in Probability, 27 (1992), 37-72.
- [8] M. Émery. *Stochastic Calculus on Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [9] K.D. Elworthy, Y. Le Jan, and Xue-Mei Li, *On the Geometry of Diffusion Operators and Stochastic Flows*. Lecture Notes in Mathematics. 1720, Springer-Verlag, 1999.
- [10] K.D. Elworthy, and S. Rosenberg, *Homotopy and Homology Vanishing Theorems and the Stability of Stochastic Flows*. Geometric And Functional Analysis. Vol. 6, No. 1 (1996).
- [11] K.D. Elworthy, and M. Yor, *Conditional expectations for derivatives of certain stochastic flows*. In J. Azéma, P.A. Meyer, and M. Yor, eds., *Sém. de Probabilités XXVII*, Lecture Notes in Maths. 1557, pp. 159-172, Springer-Verlag, 1993.
- [12] E.P. Hsu. *Stochastic Analysis on Manifolds*, Graduate Studies in Mathematics, vol 38, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [13] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North Holland-Kodansha, Tokyo, 1981.

-
- [14] Jürgen Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, fourth edition, 2005.
 - [15] H. Kunita, *Stochastic Differential Equations and Stochastic Flows of Diffeomorphisms*, Lecture Notes in Maths., (1997), 143-303.
 - [16] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry. Vol. I*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.
 - [17] X.-M. Li. *Strong p -completeness of stochastic differential equations and the existence of smooth flows on noncompact manifolds*, *Prob. Theory Related Fields* **100** (4) (1994), 485-511.
 - [18] C. Luque. *Movimento Browniano com respeito a métricas Riemannianas dependendo do tempo e aplicações ao fluxo de curvatura média*, Dissertação de Mestrado, Unicamp, Campinas, 2011.